Universidad Nacional del Litoral
Secretaría Académica
Dirección de Articulación, Ingreso y Permanencia
Año 2015

Matemática
para el ingreso

ISBN en trámite

Unidad 1. Números naturales

Elena Fernández de Carrera / Gloria Elida Moretto / Lina Mónica Oviedo
Nélida Mamut de Bergesio / Liliana E. Contini / Stella M. Vaira / Liliana Taborda

Desde la antigüedad el hombre tuvo necesidad de contar, tanto para realizar un trueque que era su forma de comercio como para conocer sus posesiones, contar los días transcurridos, etc.. Es por eso que “el contar, proceso que a la par de frecuente, es tan arraigado en el hombre, se presenta en él tan íntimamente vinculado con el pensar y con el hablar que parece poco concebible que alguna vez haya sido inventado o descubierto”.

Historia de la Matemática. Rey Pastor y Babini

Y es precisamente para contar que usamos a nuestros viejos conocidos, los números llamados............

(1)

El conjunto de los números naturales se simboliza N.
La expresión 1.234 ∈ **N**
¿Cómo se lee?

(2)

No vamos a insistir nuevamente con la operatoria de estos números a los que conocemos desde nuestros primeros años escolares; recordaremos solamente algunas de las propiedades del conjunto **N.**

a) N es un conjunto que está ordenado
¿Es cierto eso?

b) N tiene primer elemento
¿Cuál es?

c) N no tiene último elemento
¿Por qué?

De la expresión c) elaborar una justificación.

(3)

En el transcurso de los tiempos el conocimiento matemático se desarrolló para tratar de satisfacer una necesidad. Nosotros nos proponemos aquí algo similar, es decir vamos a introducir nuevos conceptos para satisfacer una necesidad: solucionar los problemas que nos plantearemos.

Números Enteros

Con el conjunto de los números naturales ya podemos contar.

Leyendo la sección “El Tiempo” de un diario de Buenos Aires encontramos esta tabla de temperatura en el mundo, que sólo transcribiremos en parte y con algunos lugares que hemos dejado vacíos intencionalmente:

Ciudad	Temperatura Máxima	Temperatura Mínima	Amplitud Térmica
Berlin	19°	9°	10°
Caracas	30°	21°	9°
Moscú	7°		10°
La Paz	17°		17°

¿Cuál es la temperatura mínima en Moscú?
¿Cuál es la temperatura mínima en La Paz?

(4)

Como se ve, nos hacen falta más números.
Nos estamos refiriendo a los *negativos* y al *cero.*

Consideremos entonces al número 0 y a los números negativos -1, -2, -3,..., si los unimos al conjunto de los números naturales ¿Qué conjunto de números obtenemos?

(5)

Por lo tanto podemos escribir por extensión:

$\mathbf{Z} = \{......., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

O bien, si llamamos **enteros positivos** a los **naturales** y los denotamos con:

$\mathbf{Z}^{+} = \{1, 2, 3,.....\}$

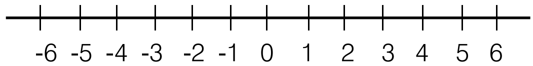
y a los **enteros negativos** los representados por:

$\mathbf{Z}^{-} = \{........, -3, -2, -1\}$

podemos escribir el conjunto de los **números enteros:**

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^{+} \cup \{0\} \cup \mathbf{Z}^{-}$$

Por lo que sabemos este conjunto numérico puede representarse en una recta mediante puntos igualmente espaciados:



A esta recta en la que representamos los números, la llamamos **recta numérica.**
El número -3 es el opuesto de 3 y viceversa, 3 es el opuesto de –3.

¿Cuál es el opuesto de 5?
¿Y el opuesto de -47?

(6)

Observemos la recta numérica; los puntos que representan a un número y su opuesto están a la misma distancia del cero.
Sabemos que, al igual que el conjunto de números naturales, **Z es ordenado.**

Vamos a ordenar un conjunto de números enteros.

a) Dados los números 15 y 32
¿Cuál es mayor?

b) Dados los números -8 y 2
¿Cuál es mayor?

Observando la recta numérica ¿De qué lado está ubicado el número mayor respecto al menor?

Ahora resulta simple responder a lo siguiente:

c) Dados los números -18 y -31 ¿Cuál es mayor?

(7)

Es importante tomar conciencia de que el lenguaje simbólico en matemática es un **lenguaje en clave**, por lo tanto debemos saber manejarlo bien para poder “leer los mensajes” y a su vez poder escribir mensajes sin riesgo de error.
En Matemática usamos **símbolos** para indicar que un número es mayor o menor que otro; **< y >** son algunos de esos símbolos. Aprendamos a usarlos.

$2 < 3$ se lee “2 es menor que 3”
$5 > 1$ se lee “5 es mayor que 1”

También podemos escribir estas expresiones de manera diferente y estar diciendo lo mismo; por ejemplo $3 > 2$ y $1 < 5$ (se lee “3 es mayor que 2” y “1 es menor que 5”).

Vamos a tratar de hacer una generalización de esto que acabamos de decir, ya que no sólo vale para estos números que elegimos al azar, sino que también vale para cualquier par de números enteros.

Para poder escribir una generalización, convengamos en representar a los números con letras.

Así podemos decir: **si a y b son dos números enteros tales que a es menor que b, es indistinto escribir:**

$$a < b \quad \text{o} \quad b > a$$

Otro signo que usaremos con frecuencia es $\leq$

Así $a \leq b$ significa que $a < b$ ó $a = b$

Dar cinco posibles valores para x que verifiquen que $x \leq -1$

¿Hay otros valores que pueda tomar x? ¿Cuántos?
¿Cuál es el mayor valor que puede tomar x?
¿Cuál es el menor valor que puede tomar x? ¿Por qué?
¿Cómo se lee la expresión $m \geq n$? ¿Qué significa?

Dar cinco valores a z que verifiquen que $z \geq 3$

¿Hay otros valores que puede tomar z? ¿Cuántos?
Escribir el conjunto de todos los valores que puede tomar z.
De los valores que puede tomar z:
¿Hay alguno que sea el mayor?
¿Y alguno que sea el menor?

(8)

También pueden escribirse desigualdades como la siguiente:

$$a < x < b$$

Se llama **doble desigualdad,** se lee “a menor que **x** menor que b”, y significa que **x** puede tomar **todos los valores comprendidos entre a y b sin incluirlos.**

Así: $-2 < \mathbf{x} < 5$ se satisface para los siguientes valores de x: -1, 0, 1, 2, 3, 4 que se puede indicar así:

$$\mathbf{x} \in \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

El conjunto de todos los valores que puede tomar **x** se llama **conjunto solución de la desigualdad o solución de la inecuación.**

a) Escribir el conjunto solución de la desigualdad $x < 1$.
Representar en la recta numérica.

b) Dar la solución de la inecuación:
$-1 < z \leq 7$ y representar gráficamente.
Indicar cuál es el primer elemento del conjunto solución y cuál es el último.

(9)

Opuesto de un número

Podemos generalizar ahora la forma de escribir el opuesto de un número.

Si k es un número entero, -k es su opuesto

Sabemos que el opuesto de 1 es - 1, y de acuerdo a lo anterior escribimos:
Si **k** = 1 su opuesto **-k** es: **-k** = **-**1

También sabemos que el opuesto de -2 es 2 y escribimos:
Si **k** = -2 su opuesto **-k** es: **-k** = -(-2) = 2

Algo para tener en cuenta

-k no tiene por qué ser un número negativo, sólo es el opuesto de k.

Para reforzar esta idea, repetir los dos ejemplos anteriores dándole distintos valores a **k.**

Operaciones con números enteros

Las operaciones fundamentales en los números son cuatro: **suma, producto, diferencia y cociente;** son las que estamos usando desde la escuela primaria.

Vamos a recordar las reglas que rigen estas operaciones, que son las que luego nos permitirán operar correctamente.

Veremos además que la resta y la división surgen como consecuencia de las propiedades de la suma y el producto respectivamente.

Leyes de la aritmética

Las operaciones entre números están regidas por ciertas leyes. Las fundamentales de la aritmética son:

	Suma	Producto
Ley 1)	$a + b = b+a$	$a \,.\, b = b \,.\, a$
Ley 2)	$a + (b+c) = (a+b)+c$	$a \,.\, (b.c) = (a.b).c$
Ley 3)	$a.\,(b+c) = a \,.\, b + a \,.\, c$	
Ley 4)	$a+0=a \quad a\in Z$	$1.\, a = a \quad a\in Z$
Ley 5)	Para todo número entero a existe otro entero -a, llamado opuesto tal que: $a + (-a) = 0$	

¿Qué nombre reciben 0 y 1 en las operaciones de suma y producto respectivamente?

(10)

Al **opuesto** de un número se lo suele llamar también inverso aditivo.
¿Cuál es el opuesto de cero?

(11)

Algo para analizar

La ley 5) nos dice que la suma de números enteros tiene la siguiente propiedad: para cada número entero existe el opuesto tal que **el número más su opuesto es igual al neutro.**

¿Ocurre lo mismo con el producto?, es decir ¿podemos asegurar que para cada número entero existe otro tal que al multiplicarlos nos dé el neutro del producto?

Una ayuda para obtener la respuesta a la pregunta anterior:
¿Cuál es el número por el que se debe multiplicar a 3 para que dé uno?
¿Pertenece este número a Z?

(12)

Como vemos existe un número que multiplicado por 3 nos da 1, pero no está en el conjunto Z; por eso decimos que **para 3 no existe inverso multiplicativo en Z.**

¿Existe el inverso multiplicativo de 0? ¿Por qué?

¿Cuáles son los únicos números que tienen inverso multiplicativo en Z?

(13)

Consecuencias:

a) A partir de la suma y sus propiedades podemos definir la **diferencia** de dos números enteros.

Decimos que **la diferencia de dos números enteros es la suma del primero más el opuesto del segundo.**

Simbólicamente se expresa así:

Sean a y b $\in$ Z
$a - b = a + (-b)$

Al **definir** la diferencia no introducimos un concepto nuevo, sino que usamos lo ya definido.

Por otra parte esta **definición** nos permite decir que

$2 - 7 = 2 + (-7)$; $3 + (-5) = 3 - 5$

$9 - (-5) = 9 + [-(-5)] = 9 + 5$

b) A partir del producto se define potencia:

Si a es un número entero y n un número natural, se define:

$a^2 = a.a$

$a^3 = a.a.a$ y en general

$a^n = a.a.a \ldots a$ (n veces) para $n > 1$

¿Por qué debemos agregar $n > 1$? Porque la potencia se define a partir del producto y para que haya un producto debe haber, por lo menos, dos factores.

Para completar la definición anterior agregamos

Si $n = 1$ es $a^1 = a$

Si $n = 0$ es $a^0 = 1$ para $a \neq 0$

De la definición de potencia surgen las propiedades:

$a^2.a^3 = a.a.a.a.a = a^5 = a^{2+3}$

$\left(a^2\right)^3 = a^2.a^2.a^2 = a.a.a.a.a.a = a^6 = a^{2\cdot 3}$

Observaciones:

a) De la definición de la diferencia resulta:

$3 + (-5) = 3-5$

$9 – (- 5) = 9 + 5$

Esto nos recuerda la "regla" para eliminar un paréntesis en una suma algebraica:

i) si el paréntesis está precedido por el signo – se cambian los signos de todos los términos que están dentro del mismo.

ii) si el paréntesis está precedido por el signo + los términos de adentro conservan su signo.

b) De las leyes que rigen la suma y el producto de números se derivan las "reglas de los signos" para la multiplicación:

Si a y b son números positivos:

i) $a.(-b) = (-a).b = - a.b$

ii) $(-a).(-b) = a.b$

Reforcemos con algunos ejercicios lo que acabamos de aprender. El primero lo damos resuelto y el resto queda para practicar:

a) Calcular las siguientes diferencias:

$(-18) – (-23) = -18 + 23 = 5$

$(-6) – (10) =$

$0 – (-8)=$

$0 – 8 =$

$(-3) – (-3) =$

$45 – (-3) =$

b) Resuelve las siguientes operaciones:

$\{(-3) + 5 -[(-4) + 8]-(-1)\} + (-2) = \{-3 + 5 – 4 + 1\} - 2= -1 – 2 = -3$

$(-8) + [7 – (-10)] - \{(-5) + [(-8) – (-9)]\} =$

$- \{5 – (-4) + (-1) – (3 + 2)\} =$

$[(-3) + (-7)]10 =$

$[(-3) + (-6)](-3) =$

$(-2)^2 =$

$(-2)^3 =$

$[(-1)^3]^0 =$

$[(-3)^3]^2 =$

Desafíos:

1. Explique porqué 0^0 es indeterminado. (Que esté definido significa que tiene un único valor)

2. *Observe que $2^4 = 4^2$. ¿Es cierto entonces que para cualquier par de números a y b se verifica que $a^b = b^a$?*

Orden en Z

Recordemos ahora las propiedades que vinculan las desigualdades con las operaciones entre números.

Ley 6)

Ley de tricotomía: si h y k son dos números enteros se verifica una y sólo una de las relaciones:

$h < k \qquad h = k \quad$ ó $\quad h > k$

Ley 7)

Si $m < n$ y $n < p$ entonces $m < p$

Ley 8)

Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$

Ley 9)

Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $a \cdot c < b \cdot c$

Ley 10)

Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $a\,c > b\,c$

(14)

Ejercicios:

a) Ordena de menor a mayor los siguientes conjuntos de números:

-7 , 0 , -1 , 2 , 13 , -4

17 , -35 , -48 , -19 , -1 , 65

b) Escribe en cada caso el conjunto de números enteros que satisfacen la condición establecida:

$-105 < x < -98$

$-2 \leq x \leq 3$

$5 \leq x < 13$

$-5 < x \leq 0$

c) Escribe en la línea de puntos el signo que corresponda:

$-3 < 4$ entonces $-3 + 2 \ldots 4 + 2$

$5 < 7$ entonces $5.(-2) \ldots 7.(-2)$

$-1 > -2$ entonces $(-1) + (-3) \ldots (-2) + (-3)$

$3 < 4$ entonces $3 - 2 \ldots 4 - 2$

$-2 < 5$ entonces $(-2).(4) \ldots (5) . (4)$

(15)

Resolvamos un problema

En su pequeño negocio, una familia emplea a dos trabajadores que sólo colaboran unas horas por semana. La cantidad total en salarios que ellos reciben varía de \$128 a \$146 por semana. Si un empleado gana \$18 más que otro ¿Cuáles son las posibles cantidades que ganan cada uno de ellos?

Solución:

— ¿Cuáles son las incógnitas?

Los salarios de los empleados, les daremos un nombre a cada uno: digamos que a es el salario de uno de ellos y b es el salario de otro.

— ¿Qué datos tenemos?

Uno de ellos gana \$18 más que el otro. Esto lo podemos escribir así:

$a = b + 18$ **(1)**

La suma de los salarios está entre \$128 y \$146.

Esto lo podemos escribir así:

$128 \leq a + b \leq 146$ **(2)**

— Ahora podemos operar, reemplazando (1) en (2) queda:

$128 \leq b + 18 + b \leq 146$ resolvemos

usando la ley 8) $128 \leq 2b + 18 \leq 146$

usando la ley 9) $110 \leq 2b \leq 128$

$55 \leq b \leq 64$

Para calcular el salario del otro empleado hacemos:

$55 \leq b \leq 64$

$55 + 18 \leq b + 18 \leq 64 + 18$

$73 \leq a \leq 82$

Respuesta:

Uno de los empleados gana entre 55 y 64 pesos a la semana y el otro gana entre 73 y 82 pesos a la semana.

Valor Absoluto

¿Qué es el **valor absoluto** de un número?
Escribir aquí la respuesta:
....
....

Podemos formalizar la respuesta y, además, expresarla en símbolos:
El valor absoluto de un número entero **k** se indica **| k |** y por definición es:
igual a k si k es un número positivo o cero, e igual al opuesto de k si k es un número negativo.

En símbolos es: $|\mathbf{k}| = \begin{cases} k & si \quad k \geq 0 \\ -k & si \quad k < 0 \end{cases}$

Leerlo como lo escribimos antes, con palabras, y no olvidar que **-k** se lee: **opuesto de k.**
El valor absoluto de un número es entonces **positivo** o **cero**.
¿Es realmente así? Vamos a verificarlo

$|5| = 5$, $|-7| = -(-7) = 7$
$|3| =$
$|-9| =$
$|0| =$

(16)

Es muy útil dar una interpretación geométrica de **valor absoluto.**
$|3| = 3$ y en la recta numérica 3 está a 3 unidades de distancia del cero.
$|-2| = 2$ y -2 está a dos unidades del cero.
A partir de estas comprobaciones resulta muy sencillo completar lo siguiente:

$|-5| = 5$ *y -5 está a..............*

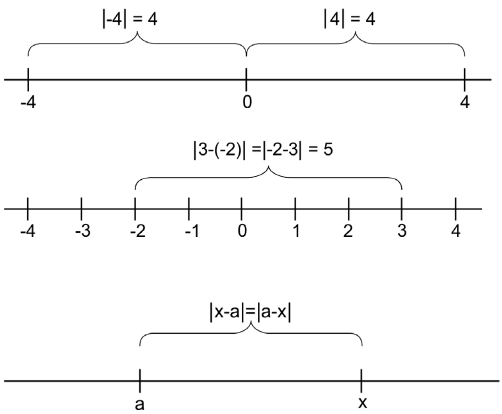
$|4| = 4$ *y 4 está a..............*

(17)

Luego, el **valor absoluto** de un número representa la *distancia* del número al cero en la recta numérica. Esta idea se puede usar para escribir la distancia entre dos números como sigue:
$|a - b|$ es la distancia entre a y b

Así por ejemplo:
$|6 - (-2)| = 8$ que es la distancia que hay entre 6 y -2.

Resumimos la interpretación geométrica del valor absoluto en los siguientes casos:



Ejercicios:
Escribir usando valor absoluto:
a) la distancia entre 3 y 5 es 2
b) la distancia entre –8 y –4 es 4
c) La distancia entre –3 y 0 es 3
d) La distancia entre x y 5 es 4
e) x dista de –2 tres unidades

(18)

Propiedades del valor absoluto

Verificar las siguientes propiedades asignándole a a y a b algunos valores:

1) $|-a| = |a|$

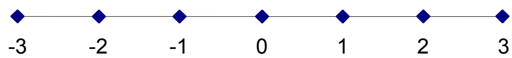
2) $|a \,.\, b| = |a| \,.\, |b|$

3) $|a + b| \leq |a| + |b|$ *(Desigualdad Triangular)*

Tratemos de deducir otras propiedades:

Si $|a| \leq 3$, significa que **a** es un número entero que está a una distancia menor o igual a 3 del origen.

Observemos la recta numérica:



Los valores que puede tomar **a** son los enteros que están entre -3 y 3.

Lo podemos escribir simbólicamente así:

$-3 \leq a \leq 3, \quad a \in Z$

Entonces $|a| \leq 3$ **es equivalente a** $-3 \leq a \leq 3$ **,** $a \in Z$

Podemos generalizar a partir de lo anterior:

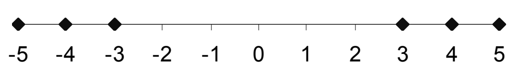
4) $|a| \leq b \quad \Leftrightarrow \quad -b \leq a \leq b, \quad a \in Z; \; b \in Z^{+}_{0}$

También vale con el signo $<$ o sea:

$|a| < b \quad \Leftrightarrow \quad -b < a < b, \quad a \in Z; \; b \in Z^{+}_{0}$

Si $|a| > 2$ significa que **a** es un número entero que está a una distancia mayor que 2 del origen.

Observando la recta numérica: **a** debe ser mayor que 2 o menor que -2



Simbólicamente lo podemos escribir:

$|a| > 2 \Leftrightarrow a > 2$ ó $a < -2, \; a \in Z$

Generalizando:

5) $|a| > b \Leftrightarrow a > b$ ó $a < -b$, $a \in Z; \; b \in Z^{+}_{0}$

También vale con el signo $\geq$

$|a| \geq b \Leftrightarrow a \geq b$ ó $a \leq -b$, $a \in Z$; $b \in Z^+_0$

Ejercicios:

Rescribir las siguientes inecuaciones usando las propiedades 4) o 5) según corresponda:

a) $|a| < 2$

b) $|b| > 2$

c) $|x - 2| \leq 1$

d) $|x + 3| \geq 5$

e) $|2x| > 8$

(19)

Ecuaciones

Las siguientes expresiones representan ecuaciones:

$x - 3 + y = 0$

$3a - 6 = 2$

$6 - x^2 = x + 1$

$m + n^3 + p^5 = 1$

Se llama ecuación a una igualdad en la que aparecen vinculados números y letras y que sólo se satisface para ciertos valores asignados a esas letras.

Las letras se llaman incógnitas

¿Cuántas incógnitas tiene cada una de las ecuaciones?

(20)

A las letras de la ecuación se les pueden asignar valores.

Los valores que deben tomar las incógnitas para satisfacer la igualdad, se llaman **soluciones o raíces de la ecuación.**

Resolver una ecuación significa encontrar todas sus soluciones.

Veamos ahora cómo se resuelve una ecuación:

(a) (*) $x - 16 = 48$

sumando 16 a ambos miembros obtenemos

$x - 16 + 16 = 48 + 16$

$x + 0 = 48 + 16$

(**) $x = 48 + 16$

$x = 64$

La ecuación tiene una sola solución que es 64

b) $y - (-8) = 6$

por definición de resta resulta

(*) $y + 8 = 6$

restando 8 a ambos miembros tenemos:

$y + 8 - 8 = 6 - 8$

$y + 0 = 6 - 8$

luego

(**) $y = 6 - 8$

$y = -2$

La ecuación tiene una sola solución que es **-2** o bien podemos decir que:

S = { -2 } es el **conjunto solución** de la ecuación.

c) $7 - 2x = (-13)(-3) + 2$

$7 - 2x = 41$

(*) $-2x = 41 - 7$

dividiendo ambos miembros por -2

(**) $x = (41 - 7) : (-2)$

$x = -17$

El conjunto solución es: **S = { -17 }**

d) $4 + x : (-2) = -1$

$x : (-2) = -1 - 4$

(*) $x : (-2) = -5$

(**) $x = (-5)(-2)$ multiplicando ambos miembros por (-2)

$\mathbf{x = 10}$

Si comparamos lo señalado con asteriscos (*) y (**), lo que en realidad se hizo es:
en a) el 16 que está **restando**, pasa al otro miembro **sumando**
en b) el 8 que está **sumando,** pasa al otro miembro **restando**
en c) el (-2) que está **multiplicando**, pasa al otro miembro **dividiendo**
en d) el (-2) que está **dividiendo,** pasa al otro miembro **multiplicando.**

En síntesis:
Lo que hacemos es el resultado de **aplicar correctamente las definiciones y leyes dadas.**
No existe la operación o ley pasaje de término de un miembro a otro.

También vamos a resolver ecuaciones con valor absoluto.
a) $|x| = 2$

Para que esa igualdad sea cierta, según definición de valor absoluto debe ser:
$x = 2$ o $-x = 2$
o lo que es lo mismo
$x = 2$ o $x = -2$

el conjunto solución es: $S = \{ -2, 2 \}$

b) $|x - 2| = 3$

debe ser	$x-2 = 3$	o	$-(x-2) = 3$
de donde	$x = 5$	o	$x = -1$

el conjunto solución es: $S = \{-1, 5\}$

c) $| x - 1 | = -1$
no tiene solución porque **el valor absoluto es siempre positivo o nulo**.

d) $|x \,.\, 2 + 3| = 1$

$x \,.\, 2 + 3 = 1$	ó	$-(x \,.\, 2 + 3) = 1$
$x \,.\, 2 = -2$	ó	$x \,.\, 2 + 3 = -1$
$x \,.\, 2 = -2$	ó	$x \,.\, 2 = -4$
$x = -1$	ó	$x = -2$

$S = \{-1, -2\}$

Hacer la gráfica de la solución

(21)

Inecuaciones

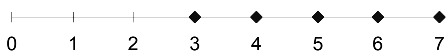
Se llama inecuación a toda expresión algebraica vinculada por alguno de los siguientes signos: $\leq$; $\geq$; > , < , $\neq$, que sólo se satisface para determinados valores de las incógnitas.

Resolvamos ahora algunas **inecuaciones** y grafiquemos las soluciones:

a) $x + 5 \geq 8$

$x \geq 8 - 5$

$x \geq 3$



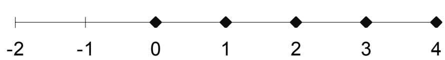
$S = \{x \in Z : x \geq 3\}$

b) $4-x < 5$

$-x < 5 - 4$

$-x < 1$

$x > -1$



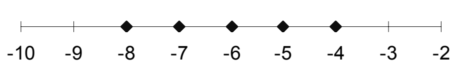
$S = \{x \in Z : x > -1\}$

c) $-7 \leq x + 1 < -2$

restando 1 a los 3 miembros

$-7 - 1 \leq x < -2 - 1$

$-8 \leq x < -3$



$S = \{ -8, -7, -6, -5, -4 \}$

d) $|x - 2| \leq 3$

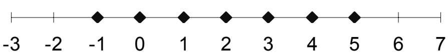
usando la propiedad 5) de valor absoluto

$-3 \leq x - 2 \leq 3$

sumando 2 a los tres miembros

$-3 \quad + 2 \leq x \leq 3 + 2$

$-1 \leq x \leq 5$



S = { -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 }

e) $|x + 1| > 2$

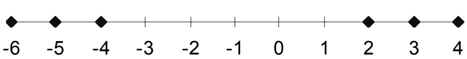
por la propiedad 6) de valor absoluto

$x + 1 > 2$ ó $x + 1 < -2$

restando 1 a ambos miembros

$x > 2 - 1$ ó $x < -2 - 1$

$x > 1$ ó $x < -3$



S = { ... , -5, -4, 2, 3, ... }

¿Qué fue hasta aquí lo esencial?

El conjunto de números naturales es N = { 1, 2, 3, 4, ...}
El conjunto de números enteros es Z = { ..... , -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...}
En el conjunto Z se definen las operaciones suma y producto.

Propiedades de la suma:

- Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$
- Conmutativa: $a + b = b + a$
- Existencia del elemento neutro: $a + 0 = a \; \forall a, \in Z$
- Existencia del opuesto: $\forall a \; \exists -a : a + (-a) = 0$

Definición de resta: $a - b = a + (-b)$

Propiedades del producto:

- Asociativa: $a . (b . c) = (a . b) . c$
- Conmutativa: $a . b = b . a$
- Existencia del elemento neutro: $a . 1 = a, \; \forall a \in Z$
- Distributiva respecto a la suma:
  $a . (b + c) = a . b + a . c$
- No existe en Z elemento inverso respecto del producto salvo para 1 y -1.

Algunas propiedades de la potencia

$a^n a^s = a^{n+s}$

$(a^n)^s = a^{ns}$

Propiedades de la relación de orden:

Tricotomía: dados dos enteros a y b entonces es $a < b$ o $a = b$ o $a > b$

Transitiva: si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

Monotonía de la suma: si $a < b \Rightarrow a + c < b + c$

Monotonía del producto: si $a < b$ y $c > 0 \Rightarrow a . c < b . c$

si $a < b$ y $c < 0 \Rightarrow a . c > b . c$

El valor absoluto de un número se define así:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

El valor absoluto de un número se interpreta geométricamente como la distancia del número al 0 en la recta numérica.

Propiedades del valor absoluto

1. $| -a | = | a |$
2. $| ab | = | a | \, | b |$
3. $| a+b | \leq | a | + | b |$ (Desigualdad triangular)
4. $| a | \leq b$ es equivalente a: $-b \leq a \leq b$
5. $| a | \geq b$ es equivalente a: $a \geq b$ o $a \leq -b$

Las propiedades 5 y 6 son válidas con los signos $<$ y $>$ respectivamente

Ecuación: es una igualdad en la que aparecen vinculados números y letras y que sólo se satisface para determinados valores asignados a las letras.

Los valores de las incógnitas que satisfacen la ecuación se llaman soluciones de la ecuación.

Inecuación: es toda expresión algebraica vinculada por alguno de los siguientes signos: $\geq$, $\leq$, $>$, $<$, $\neq$ y que sólo se satisface para determinados valores de las incógnitas.

Para resolver una ecuación o una inecuación en la que aparece valor absoluto primero hay que «sacar» las barras de valor absoluto:

a) Para «sacar» las barras en una ecuación usamos la definición de valor absoluto.

b) Para «sacar» las barras en una inecuación usamos las propiedades 4) o 5) según corresponda.

Ejercicios y aplicaciones

1. Si a y b son números enteros tales que $a \neq 0$ y $a \cdot b = 0$
¿Qué podemos decir de b?

2. Si m es un número entero.
¿Qué relación hay entre m y m.(-1)?
¿Y entre m y m.1?

3. Transformar en sumas algebraicas los productos dados.
¿Cuántos términos tiene cada resultado?
$-3 \cdot (4x + 15)(1 + a)$
$(6 - n)(4 + b - z)(2n + b)$

4. Transformar en producto las siguientes sumas algebraicas:
$12 + 3y + 4x + xy$
$3a + ab + ac - 6 - 2b - 2c$
¿Qué ley estás usando?

5. Resolver:

a) $(-3)^3$	d) $(2)^3$
b) $(-1)^2$	e) $(4)^2$
c) $(-1)^7$	f) $(3)^5$

¿Qué conclusión podemos sacar respecto del exponente y del signo del resultado?
¿Cuándo $(-1)^n = -1^n$?
¿Cuándo $(-1)^n = 1$?
¿Cuándo $(-1)^n = -1$?

6. Resolver (suponer que las letras *a* y *x* representan números naturales):

a) $(-3a)^3$	d) $(-3)^4$
b) $-(-1)^4$	e) $-(-2x)^3$
c) -3^2	f) -2^3

7. Resolver las operaciones indicadas:
a) $3^2 \cdot 3^3 : 3^4 =$
b) $[(-5)^2]^3 + (-5)(-5)^2 =$
c) $[(-2)^3]^0 + [(-3)^2]^2 =$
d) $(3^2 - 2^2) : \{(3 + 2)^2 + [(-5)^2 - 5^2] : 12 + 10(-2)\} =$

8. Expresar los siguientes números como suma de potencias de 10

a) 491 b) 112 c) 2023

9. Resolver las siguientes ecuaciones:

a) $x + 3 = 0$

b) $x - 4 = -1$

c) $(x^2 - 9) = (x + 3) (x - 3)$

d) $7x + 33 + 4x = -22x$

e) $(x - 2) (x - 1) = 0$

f) $3x (x + 4) = 0$

g) $x (x - 1) (x + 2) = 0$

h) $x^2 + 3 = 0$

i) $| x | - 5 = 1$

j) $(-1 - | 5 | - | -12 |) + | x | = 0$

k) $| x | - (2 | x | - | -8 |) = | -3 | + 5$

l) $(-1) | x - 3 | + 2 = -2$

m) $- | x + 1 | + (7 - 9) = 0$

n) $5 + | x - 2 | = 4 - (-1)$

10. De las siguientes afirmaciones demostrar las que sean verdaderas y dar contraejemplos de las que sean falsas (contraejemplo es un ejemplo para demostrar que una afirmación no es cierta).

a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b) $a - (b - c) = a - b - c$

c) $(a + b) . (a - b) = a^2 - b^2$

d) $a (b - c) = ab - ac$

e) Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$ ¿Cómo se llama a esta ley?

f) $(a^2)^5 = a^7$

11. Decir cuál es el error que se comete con el siguiente razonamiento:

supongamos que $m = n$

sumando (-n) a ambos miembros se obtiene $m - n = 0$

luego $2 . (m - n) = 7 . (m - n)$

y por la cancelativa $2 = 7$ **absurdo**

12. ¿Para qué valores de **x** e **y** son verdaderas las siguientes afirmaciones?

a) $(x + y)^3 = x^3 + y^3$

b) $(x - y)^2 \neq x^2 + y^2$

13. Representar en la recta numérica los siguientes conjuntos de números enteros:

$A = \{ x \in Z : | x | = 2 \}$

$B = \{ x \in Z :$ x es menor que 3 y mayor que -2 $\}$

$C = \{ x \in Z : x \geq -1 \}$

14. Escribir en cada caso el conjunto de números enteros que satisface la desigualdad y representar gráficamente la solución:

a) $x + 3 \leq 2$

b) $-7 \leq x + 1 \leq -2$

c) $1 - x < 4$ y $1 - x > -3$

d) $-(x + 2) < 1$ y $-(x + 2) > 0$

e) $2x + 1 > 3$ o $2x + 1 < -3$

f) $|x - 2| \leq 3$

g) $|2x + 4| > 4$

h) $\begin{cases} |x| > 0 \\ y \\ |x| < 2 \end{cases}$

15. Para pensar mejor

a) ¿Para qué valores de a y b se cumple $|a + b| = |a| + |b|$?

b) ¿Para qué valores de $a \in Z$ es cierta la siguiente desigualdad?: $|x| > a$

c) ¿Cuándo es cierto que $|-x| = x$?

d) ¿Cuándo es cierto que $|x| = -x$?

16. Encontrar el conjunto solución (en Z) de las siguientes desigualdades

a) $7x - 2 \leq 9x + 3$

b) $3 < 1 - 6x \leq 4$

c) $(x+2)(x - 3) > 0$

17. Encontrar todos los valores de x que satisfagan ambas desigualdades de manera simultánea

a) $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 < 3$

b) $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 > -4$

c) $3x + 7 > 1$ y $2x + 1 < -4$

18. Encontrar todos los valores de x que satisfagan al menos una de las dos desigualdades.

a) $2x - 7 > 1$ o $2x + 1 < 3$

b) $2x - 7 \leq 1$ o $2x + 1 < 3$

c) $2x - 7 \leq 1$ o $2x + 1 > 3$

19. Determinar el conjunto solución de las desigualdades dadas y representar gráficamente la solución

a) $|-4x+2| \geq 10$

b) $\left|\frac{2x}{7}-5\right| < 7$

c) $\left|1+\frac{3x}{4}\right| \leq 2$

20. La suma de tres números consecutivos pares es 78.
¿Cuáles son los números?

21. Julián obtuvo 80, 82 y 98 de calificación en las 3 primeras pruebas de álgebra.
¿Qué calificación debe obtener en la cuarta prueba para que su promedio sea 90?

22. La suma de seis números es par, el producto de los cuatro primeros es impar y el último es par. ¿El quinto número es **par** o **impar**?

23. Hallar cuatro números enteros consecutivos si la suma del tercero y el cuarto es 25.

24. Juan dice: "mi hijo tiene 26 años menos que yo, y su hijo, mi nieto, tiene 22 años menos que él. Entre mi nieto y yo sumamos 62 años ¿Cuántos años tiene Juan?

25. Para que su hijo estudie aritmética, el padre propone pagarle 80 centavos por cada problema resuelto correctamente y cobrarle 50 centavos por cada solución incorrecta.

Después de 26 problemas ninguno de los dos le debe nada al otro. ¿Cuántos problemas resolvió correctamente?

Respuestas Unidad 0

1-Naturales.

2- mil doscientos treinta y cuatro pertenece a N

3- a) Sí; porque dados dos números naturales podemos decir cual es el menor.

b) El número 1.

c) N no tiene último elemento porque dado cualquier natural **a** existe **a + 1** que es mayor que **a**.

4- -3° 0°.

5- enteros.

6- –5, 47.

7- a) 32; b) 2, a la derecha, c) -18.

8- En la respuesta no deben estar ni 0 ni los números positivos. Sí, infinitos. –1.

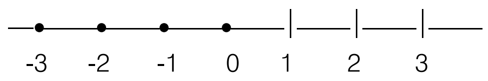
No existe. Porque cualquiera sea el entero **a** que tomemos, existe **a-1** que es menor.

m mayor o igual que n. Significa que: $m > n$ o $m=n$.

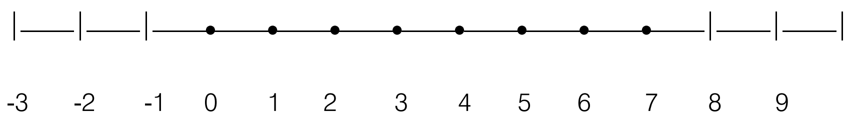
En la respuesta no pueden estar los elementos del siguiente conjunto:

{..., -3,-2,-1,0,1,2}. Sí, infinitos {3,4,5,6,7,8....}. No. Sí, 3.

9- a) S = {..., –5, –4, –3, –2, –1, 0}



b) S = {0,1,2,3,4,5,6,7} 0 es el primer elemento y 7 es el último.



10- 0 es el elemento neutro de la suma; 1 es el elemento neutro del producto

11- 0.

12- 1/3; No.

13- No. Porque todo número multiplicado por 0 da 0; 1 y – 1.

14- a) -16; 8; -8; 0; 48 b) 13; -3; -100; 27; 56; 4; -8; 1; 729

Desafíos

1) Si pensamos que la base es cero, el resultado es cero. Si pensamos que el exponente es cero, el resultado es 1. ¿Cuál de los dos tomar? No hay forma de decidir, por eso se llama indeterminación.

2) No es cierto. Ejemplo: $3^2 = 9$ y $2^3 = 8$

15-a) -7; -4; -1; 0; 2; 13

-48; -35; -19; -1; 17; 65

b) {-104, -103, -102, -101, -100, -99}; {-2, -1, 0, 1, 2, 3}; {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}; {-4, -3, -2, -1, 0}

c) -3+2 < 4+2; 5(-2) > 7(-2); (-1)+(-3) > (-2)+(-3); 3-2 < 4-2; (-2)(4) < (5)(4)

16- $|3| = 3$; $|0| = 0$; $|-9| = 9$

17- –5 está a 5 unidades de distancia de 0; 4 está a 4 unidades de distancia de 0.

18- a) $|3 – 5| = 2$; b) $|- 8 – (- 4)| = 4$;

c) $|– 3| = 3$; d) $|x – 5| = 4$; e) $|x + 2| = 3$

19- a) $-2 < a < 2$; b) $b > 2$ o $b < -2$; c) $-1 \leq x – 2 \leq 1$;

d) $x+3 \geq 5$ o $x+3 \leq -5$; e) $2x > 8$ o $2x < -8$

20- La primera ecuación tiene 2 incógnitas que son x e y. La segunda ecuación tiene 1 incógnita que es a. La tercera ecuación tiene 1 incógnita que es x. La cuarta ecuación tiene 3 incógnitas m, n y p.

21- a) ——|——•——|——|——|——•——|——

-3 -2 -1 0 1 2 3

b) ——|——•——|——|——|——|——|——•——|—

-2 -1 0 1 2 3 4 5 6

d) ——|——|——•——•——|——|——|——|—

4 -3 -2 -1 0 1 2 3

Ejercicios y aplicaciones

1- b = 0

2- Uno es el opuesto del otro. Son iguales.

3- a) –12x–12ax–45–45a ; 4 términos.

b) $48n+24b+8nb+6b^2-12nz-6bz-8n^2-2bn^2-nb^2+2n^2z+nbz$;

11 términos.

c) Distributiva del producto con respecto a la suma.

4- a)(4+y).(3+x) b)(a–2).(3+b+c)

c) Distributiva del producto con respecto a la suma.

5- a) –27 b) 1 c) –1 d) 8 e) 16 f) 243

Al calcular la potencia de un número negativo, si el exponente es par el resultado es positivo; y si es impar el resultado es negativo. $(-1)^n=-1$ si *n* es impar $(-1)^n=1$ si *n* es par.

6- a) $-27.a^3$ b) –1 c) –9 d) 81 e) $8x^3$ f) – 8

7- a) 3 b) 15500 c) 82 d) 1

8- a) $491= 1 + 9.\ 10 + 4\ .\ 10^2$ b) $112= 2 + 10 + 10^2$

c) $2023= 3 + 2.\ 10 + 2\ .\ 10^3$

9- a) –3 ; b) 3; c) Todo número es solución; d) –1; e) 1 y 2 f) 0 y –4

g) 0, 1 y –2; h) No tiene solución; i) -6 y 6; j) $\{-18,18\}$;

k) 0 l) –1 y 7; m) no tiene solución; n) 2

10- a) V; $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2=a^2+2ab+b^2$

b) F; contraejemplo: si a = 2, b = 3 y c = 4 a – (b – c) = 3 y a – b – c = –5

c) V; $(a+b)(a-b)=a^2+ba-ab-b^2= a^2-b^2$

d) V; a (b–c) = ab – ac por la ley distributiva del producto con respecto a la suma

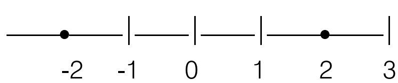
e) Ley cancelativa.

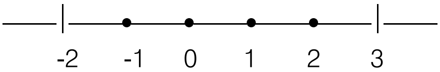
f) F; contraejemplo si a=2 $(a^2)^5 = (2^2)^5=4^5 = 1024$; $a^7=2^7=128$

11- El error es aplicar la ley cancelativa ya que *(m – n)=0*

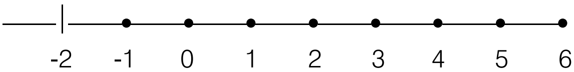
12- a) Es verdadera en los siguientes casos: Si x = 0 e y cualquiera. Si y =0 y x cualquiera. Si x + y = 0 es decir y = –x

b) Es verdadera cuando x e y son distintos de cero

13- a)  A = {–2,2}

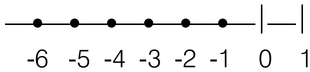
b) 

B = {–1,0,1,2}

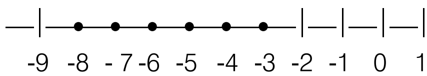
c) 

C= {–1,0,1,2,3,4,...}

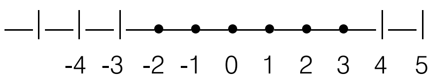
14- a) S={...,–5,–4,–3,–2–1}



b) S={–8,–7,–6,–5,–4,–3}

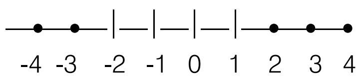


c) S={–2,–1,0,1,2,3}

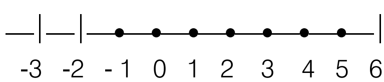


d) S = ∅

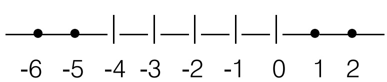
e) S = {x∈Z / x<–2 ó x >1}={...,–4,–3,2,3,4,5,...}



f) S= {x∈Z / –1≤ x ≤ 5}={–1,0,1,2,3,4,5}



g) S= {...,–6,–5,1,2,3,...}



h) La solución de $|x| > 0$ es $Z - \{0\}$; la solución de $|x| < 2$ es $S=\{-1,0,1\}$ y la solución del sistema es la intersección de los conjunto solución, es decir $S=\{-1,1\}$

15- a) Para: $a=b=0$ ó signo $a=$ *signo* b ó $a=0$ $b \neq 0$ ó $b=0$ $a \neq 0$.

b) a es un entero negativo.

c) $|-x| = x$ si $x \geq 0$

d) $|x| = -x$ si $x \leq 0$

16- a) $S=\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

a) Como no hay enteros entre -1/2 y –1/3 $\Rightarrow S = \varnothing$

b) $S_1 = \{4, 5, 6, 7, ... \}$; $S_2 = \{ ... , -5, -4, -3\}$, luego $S=S_1 \cup S_2$

17- a) $S = \{-1, 0\}$

b) $S = \{-1, 0, 1, 2, 3, ... \}$

c) $S = \varnothing$

18- a) $S_1 = \{5, 6, 7, 8, ... \}$; $S_2 = \{ ... , -3, -2, -1, 0\}$, luego $S = S_1 \cup S_2$

b) $S_1 = \{ ..., 1, 2, 3, 4\}$; $S_2 = \{ ... , -2, -1, 0\}$, luego $S = S_1 \cup S_2 = S_1$

c) $S_1 = \{ ... , 1, 2, 3, 4\}$; $S_2 = \{ 2, 3, 4, 5, 6, ... \}$, luego $S = S_1 \cup S_2 = Z$

19- a) $S_1 = \{... , -4, -3, -2\}$; $S_2 = \{3, 4, 5, 6, ... \}$, luego $S = S_1 \cup S_2$

b) $S = \{-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, ... , 39, 40, 41\}$

c) $S = \{ -4, -3, -2, -1, 0, 1\}$

20- Los números son 24; 26 y 28

21- Debe obtener 100 puntos

22- Par

23- 10, 11, 12 y 13

24- 55 años

25- 10