Universidad Nacional del Litoral
Secretaría Académica
Dirección de Articulación, Ingreso y Permanencia
Año 2015

Matemática
para el ingreso

ISBN en trámite

Anexo

Vivana Cámara / Adriana Engler / Osvaldo Gorosito / Graciela Imbach / Roberto Macías
María Magdalena Mas / Fabiana Montenegro / Daniela Müller / Yanina Redondo
Karina Temperini / Stella Vaira

Dada la problemática que presenta la matemática como disciplina, les proponemos un material complementario a las actividades del libro *Matemática para el Ingreso*.

En estos anexos se incorporan ejemplos, notas, actividades y reflexiones con el objetivo de lograr una visión integradora de los conceptos matemáticos tratados en los distintos capítulos del libro.

El anexo de los capítulos 1 y 2 enfatiza el uso de las propiedades de los conjuntos numéricos, se agregan algunas reflexiones para justificar afirmaciones y recomendaciones en la resolución de ecuaciones e inecuaciones. También se presentan problemas que integran los contenidos.

En el anexo del capítulo 3 se trabaja con polinomios y se revisan las operaciones de adición, multiplicación y división de polinomios analizando las propiedades que se cumplen. Se recuerda la regla de Ruffini para resolver determinadas divisiones, el teorema del resto y el significado de raíces múltiples, para culminar con la factorización de polinomios. Se presentan finalmente algunas consideraciones para resolver ecuaciones algebraicas racionales.

En el anexo del capítulo 4 se revisa, en primera instancia, el concepto de función y se hace hincapié en la interpretación de los parámetros de la función de primer grado y sus distintas representaciones. Luego se trabaja con sistemas de ecuaciones lineales en la resolución de problemas. Finaliza este anexo con un trabajo de inecuaciones de primer grado en una y dos variables.

En el anexo del capítulo 5 se aborda el análisis de los parámetros en las distintas expresiones de la función de segundo grado, terminando con problemas que integran la función de primer y de segundo grado.

En el anexo del capítulo 6 se presentan diversos problemas de resolución de triángulos rectángulos.

En las distintas secciones se han incluido ejercicios del anexo compilado por las profesoras Zulma Arralde, Silvia Bernardis, Viviana Cámara, Graciela Imbach y Herminia Rostagno.

Finalmente esperamos que las actividades incorporadas les permitan reflexionar los temas tratados a fin de lograr un aprendizaje significativo.

Capítulos 1 y 2
Números

1.1 Conjuntos numéricos: Naturales y Enteros. Revisión de las operaciones y sus propiedades. Representación en la recta numérica

1) Clasificar las siguientes afirmaciones en Verdaderas o Falsas. Si es Verdadera, demostrarla y si es Falsa, dar un contraejemplo.

a) El conjunto de los números enteros tiene primer elemento y no tiene último elemento.

b) El opuesto del número natural **a** es **–a**, también natural.

c) Sean a y b números enteros tales que $a < b$, entonces $a - b < 0$.

d) Sean a y b números enteros, si $|a| = |b|$ entonces $a = b$.

e) Dado el número entero **a**, se cumple siempre que $|a| > 0$.

f) Sean a y b números enteros no simultáneamente nulos, entonces $a^b = b^a$.

g) El conjunto solución en Z de la ecuación $|x| = b$ es $S = \{-b, b\}$.

Nota: Para justificar la verdad o falsedad de una afirmación, se debe tener en cuenta que: si un enunciado es *Verdadero* debe demostrarlo o enunciar la propiedad que justifica la verdad del mismo. Por otro lado, si es *Falso* debe dar un contraejemplo, es decir es suficiente encontrar un caso para el cual el mismo no se cumpla. Recordar que para que una afirmación sea Verdadera debe valer para *todos* los casos posibles; de no ser así es Falsa. Proponemos los siguientes ejemplos:

- $(a + 4)^2 = a^2 + 8a + 16$

Esta afirmación es Verdadera, pues para demostrarla basta usar la definición de potencia y luego la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición:

$(a + 4)^2 = (a+4).(a+4) = a.a + a.4 + 4.a + 4.4 = a^2 + 8a + 16$.

- $a.(5.c) = (a.5).(a.c)$

Esta afirmación es Falsa. Un contraejemplo se tiene al considerar $a = 2$ y $c = -3$:

por un lado, $a.(5.c) = 2.(5.(-3)) = 2.(-15) = -30$,

y por otro lado, $(a.5).(a.c) = (2.5).(-3.5) = 10.(-15) = -150$.

Evidentemente $-30 \neq -150$.

2) Completar con la palabra par o impar cada una de las siguientes proposiciones:
a) La diferencia positiva de dos números impares es………..
b) La diferencia positiva de dos números pares es………
c) El producto de dos números pares es…………….
d) El producto de un número par y otro impar es……….

3) Escribir en símbolos las siguientes expresiones.
a) a es menor o igual que b.
b) x está comprendido entre 0 y 2.
c) La distancia de **a** al cero es tres.
d) Los números enteros cuya distancia al 8 sea menor o igual a 5.

4) Indicar y justificar si las siguientes proposiciones son siempre ciertas:
a) la suma de dos números naturales consecutivos no es divisible por 2.
b) la suma de tres números naturales consecutivos es divisible por 3.

5) Justificar por qué las desigualdades $8 \geq 8$ y $10 \geq 6$ son correctas.

6) Escribir el conjunto solución de las siguientes inecuaciones en enteros y representarlo en la recta numérica:
a) $x < -3$ **b)** $x > 0$ **c)** $x \geq 6$ **d)** $x \leq -12$ **e)** $|x| \leq 4$ **f)** $|x-4| < 3$

1.2 Conjunto de números Racionales.
Revisión de las operaciones y sus propiedades

1) Responder las siguientes preguntas, justificando las respuestas.
a) ¿Cuándo una fracción es positiva?, ¿cuándo es negativa? y ¿cuándo es igual a cero?
b) ¿Cuándo una fracción es menor que 1?, ¿cuándo es mayor que 1? y ¿cuándo es igual a uno?
c) ¿Entre qué enteros se encuentra el número 8/3? en lo posible responder sin usar calculadora.

2) Seleccionar la respuesta correcta en la siguiente expresión.
Si $\frac{a}{b} = \frac{s}{t}$, con a, b, s y t enteros donde $b \neq 0$ y $t \neq 0$, entonces:

a) $as = bt$
b) $a = s$ ó $b = t$
c) $at = sb$
d) $b = 1$ y $t = 1$

3) Si el largo de un corte rectangular de madera es de 35 cm y el ancho es de 15 cm.

a) Escribir la razón (o fracción) entre el largo y el ancho del corte rectangular. Interpretar esa razón y expresar su significado en forma coloquial.

b) Escribir la razón (o fracción) entre el ancho y el largo del corte rectangular. Interpretar esa razón y expresar su significado en forma coloquial.

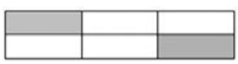
c) Si al considerar ahora un corte que tiene 2 cm más tanto de largo como de ancho que el anterior, resolver nuevamente a y b. Comparar los resultados.

d) Si al considerar ahora un corte que tiene el doble de largo y el doble de ancho que el primer corte, resolver nuevamente a y b. Comparar los resultados.

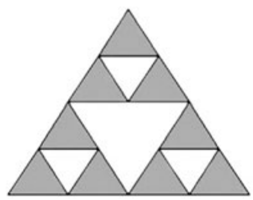
e) ¿Se pueden generalizar los resultados anteriores? Intentarlo.

4) Determinar en forma exacta o aproximada qué fracción y porcentaje del total representa el área sombreada:

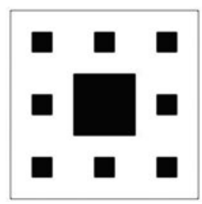
a)



b)



c)



5) ¿Qué fracción del día es 1 hora?, y ¿un minuto?

6) Una población de 120.000 individuos aumentó un 23%, ¿cuántos nuevos individuos hay? ¿Cuál es el tamaño de la nueva población?

7) Un artículo inicialmente costaba \$50, luego sufrió un aumento de \$8,50; ¿qué porcentaje aumentó?

8) ¿Qué porcentaje de aumento tiene el precio de un artículo que pasa por las manos de 3 intermediarios si cada uno vende el producto un 50% más caro de lo que lo compró?

9) Contestar las siguientes preguntas teniendo en cuenta que:

$\text{Escala} = \dfrac{\text{Medida del dibujo}}{\text{Medida de la realidad}}$. Por ejemplo, la escala 1:100 significa que una unidad del dibujo representa 100 unidades de la realidad.

a) ¿Cuál es la escala de un plano sabiendo que 25 mm del mismo se corresponde con 2 metros de la realidad?

b) Se quiere dibujar una pieza muy pequeña a escala 5:1. ¿Qué dimensión deberá dar a la base si su longitud real es de 3 mm?

10) Un tanque está lleno de agua, se vacía a la mitad, luego se extrae un cuarto de lo que queda y aún quedan en el tanque 600 cm^3, ¿qué capacidad tiene el tanque?

11) Se lleva recorrido $\frac{7}{15}$ de un camino y aún quedan $\frac{1}{3}$ de kilómetro para llegar a la mitad. ¿Qué longitud tiene el camino?

12) ¿Cuál es el número que sumado al numerador y al denominador de $\frac{7}{10}$ da como resultado la fracción $\frac{3}{4}$?

1.3 Conjuntos numéricos: Irracionales y Reales.
Revisión de las operaciones y sus propiedades

1) Responder las siguientes preguntas, justificando las respuestas.

a) ¿Para qué valores de **a** son válidas las siguientes expresiones?

$\sqrt{a^2} = |a|$ $\qquad$ $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

b) ¿Es posible que esté bien definida $\sqrt{-x}$?

c) ¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $\frac{2}{x} + 8x = -10, \text{ con } x \neq 0$?

d) ¿Cuál es el conjunto solución de la ecuación $\sqrt{2-x} = x$?

e) ¿Cuál de las siguientes inecuaciones no tiene solución? y ¿Cuál tiene a todo el conjunto de números reales como solución?

i) $|2x-3| > -3$ $\qquad$ ii) $|2x-3| \leq -3$

f) ¿Cuáles son los posibles valores del cociente $\frac{|2x|}{2x}$, para $x \neq 0$?

2) Justificar la verdad o falsedad de los siguientes enunciados:

a) $(b+c)^{-1} = b^{-1} + c^{-1}, b \in Q, c \in Q \text{ y } b \neq 0, c \neq 0$

b) $\left(a^b\right)^c = a^{b+c}, a \in R, b \in R, c \in R \text{ y } a \neq 0$

c) La expresión **a** no es menor que **b** es equivalente a decir: **a** es mayor que **b**, siendo **a** y **b** reales.

d) Existen puntos de la recta que no representan números racionales.

e) ab + c = ab + ac, siendo a, b y c reales y a≠ 0.

f) Todos los números irracionales no son racionales.

g) Un número puede ser real sin ser entero.

h) Todo número natural es real.

i) Todo número racional es irracional.

j) Todo número racional es real.

k) Todo número entero es natural.

3) Escribir el conjunto solución en Z y en R de las siguientes expresiones que contienen inecuaciones. En cada caso representar el conjunto solución en la recta numérica.

a) $x < 2$ y $x \geq -3$

b) $x < 2$ y $x > 7$

c) $x \geq 2$ y $x < 3$

d) $x < -1$ ó $x \geq -3$

e) $x < 2$ ó $x \leq 7$

f) $x = 2$ ó $x < -5$

g) $x \geq 4$ ó $x < 0$

4) Resolver las siguientes inecuaciones con valor absoluto en Z y en R. En cada caso representar el conjunto solución en la recta numérica. Expresar el conjunto solución en R usando notación de intervalos.

Tener en cuenta que con $b > 0$:

(1) $|x| < b$ es equivalente a: $-b < x < b$

(2) $|x| > b$ es equivalente a: $x < -b$ ó $x > b$

a) $|a| > 0$

b) $-2|b| > 0$

c) $|x| \geq -3$

d) $|x-1| < 3$

e) $|2-c| \geq 4$

f) $|a| < -5$

g) $|w| > 2$ y $w = 0$

h) $|w| > 2$ ó $w = 0$

i) $|w| \geq 2$ ó $w < -5$

5) Escribir 5 números reales entre 0 y $\frac{1}{2}$. Escribir 5 números reales entre 10 y 10,1.

6) Aplicando propiedades escribir como una única potencia:

a) $\dfrac{\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{-3} : \left(5^{6}\right)^{\frac{3}{2}}}{5^{9}}$

b) $\dfrac{2^{-4}.4^{3}}{2^{-5}.8}$

c) $\dfrac{m^{3} : \left(m^{-8}.m^{3}\right)^{-2}}{\left(m^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{8}{3}}}$ con $m \neq 0$

d) $\dfrac{\left(a^{5}\right)^{2} \cdot \left(b^{-6}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot c^{3}}{\left(a^{-3}\right)^{-2} \cdot \left(b^{2}\right)^{-1} \cdot \left(c^{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$ con $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$

7) Indicar en cada caso si la afirmación es verdadera o falsa, justificando la respuesta. Las letras toman valores adecuados para que las operaciones sean válidas.

a) $\left[(-2)^{2}\right]^{3} + \left[(-3)^{3}\right]^{0} = 65$

b) $\left(\dfrac{4x}{5y}\right)^{3} \left(\dfrac{15y^{2}}{2x^{2}}\right) = 6\dfrac{y}{x}$

c) $\sqrt{\left(m^{4}-n^{4}\right)\left(m^{2}+n^{2}\right)} = \left(m^{2}+n^{2}\right)\sqrt{\left(m^{2}-n^{2}\right)}$

d) $\sqrt[3]{b^{2}}.\sqrt[4]{b^{3}} = \sqrt[12]{b^{17}}$

8) Resolver las siguientes ecuaciones y establecer las restricciones necesarias:

a) $\frac{2}{2x+3}+\frac{4}{2x-3}=\frac{5x+6}{4x^2-9}$ b) $\frac{4}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{5x+6}{x^2-4}$ c) $\frac{7x}{x-5}=\frac{35}{x-5}$

d) $\frac{7x}{x-5}=\frac{42}{x-5}$ e) $\frac{(-2)^3}{|3-2x|}=2^{-1}(-4)$ f) $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}=4$

g) $\sqrt[3]{4+5x}-1=\frac{1}{5}$ h) $\frac{3}{\sqrt{x-2}}+2=8$ i) $\sqrt[4]{\frac{1}{3}-x}=\frac{1}{2}$

9) Resolver las siguientes inecuaciones y establecer las restricciones necesarias:

a) $\frac{-2}{4-3x}>0$ b) $\frac{2}{(1-x)^2}>0$ c) $\frac{-3}{2x+5}\leq 0$

d) $\frac{2x}{(1-x)^2}>0$ e) $\left|\frac{2-3x}{5}\right|\geq 2$ f) $1<|x-2|<4$

g) $0<|x-2|<4$ h) $\frac{3x-1}{2}-\frac{x-1}{3}<2x-1$

i) $4x+9-2(3x-5)\geq\frac{x+1}{3}-1$ j) $\frac{x-9}{5}-\frac{5x-13}{15}\leq\frac{4x}{3}+10$ k) $4|7-3x|-5\leq 3$

10) En muchos problemas aplicados surge la necesidad de establecer relaciones entre diferentes variables. Para las siguientes relaciones “despejar” la variable que se indica:

a) $P+N=\frac{c+2}{c}$, despejar: **c**

b) Volumen de una esfera: $V=\frac{4\pi}{3}r^3$, despejar: **r**

c) Área total de un cono truncado: $A_T=\pi\, g\,(R+r)+\pi(R^2+r^2)$, despejar: **g**

11) Expresar en Notación Científica:

a) Distancia de la Tierra a la Luna: 384.000 km
b) Distancia de la Tierra al Sol: 150.000.000 km
c) Distancia de la Tierra a Neptuno: 4.308.000.000 km
d) Virus de la gripe: 0,000 000 0022 m
e) Radio del protón: 0,000 000 000 05 m
f) Masa de un estafilococo: 0,000 000 000 1 g.

12) Teniendo en cuenta los datos del ejercicio anterior, responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas veces está la Tierra más lejos del Sol que de la Luna?
b) ¿Cuántos protones medirían lo mismo que el virus de la gripe?
c) ¿Cuántos virus de la gripe podemos poner en fila desde la Tierra hasta la Luna?

13) Indicar si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas. Si resultan falsas expresar el segundo miembro de manera que se transforme en verdadera.

a) $\log\sqrt{c} = \log\frac{c}{2}$ b) $\log a - \log b = \frac{a}{b}$

14) Justificar las siguientes igualdades:

a) $\log_3 2 + 1 = \log_3 6$ b) $\log_2 7 = \log_2 14 - 1$

15) Selecciona la respuesta correcta. Al calcular m en $\log_{\frac{1}{16}} 8 = m$, se obtiene:

a) $m = \frac{3}{4}$ b) $m = -\frac{4}{3}$ c) $m = \frac{4}{3}$ d) $m = -\frac{3}{4}$

16) Hallar el valor de x que verifica:

a) $2.\log x + 1 = 4$ b) $10\log_5 x - 5\log_5 x + 5 = 0$

c) $\log_{0,5} 8 = \log_{0,5} x + \log_{0,5} 2x$ d) $\log_3 x = \log_3 5 + \log_3 \frac{1}{2}$

e) $81 = \frac{1}{3^{x-1}}$ f) $\log_{12}(x-5) + \log_{12}(x-5) = 2$

g) $\log_{\frac{1}{7}} x + \log_{\frac{1}{7}}(5x-28) = -2$ h) $\log_2(x^2+3x+3) - \log_2(2x-3) = \log_2(2x+1)$

i) $2^{x+3} - 2^{x+5} + 3 = 0$ j) $125 : \frac{1}{5^{3x}} = 25^{x-2}$

k) $2^{3x} \cdot 2 = 4^x \cdot 4^5$ l) $\left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}x^2} = \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{8}{27}\right)^{x-1}$

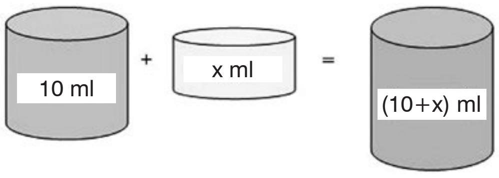
1.4 Problemas

A modo de ejemplo les presentamos dos problemas resueltos.

• Ejemplo 1: *Problema de mezcla.* Un químico tiene 10 ml de una solución que contiene un ácido a 30% de concentración. ¿Cuántos mililitros de ácido puro han de agregarse para aumentar la concentración a 50%?

Sea x la cantidad de ml de ácido puro para agregar.

Mezcla original + Ácido puro = Nueva mezcla



Cantidad total de la solución: $10 + x$

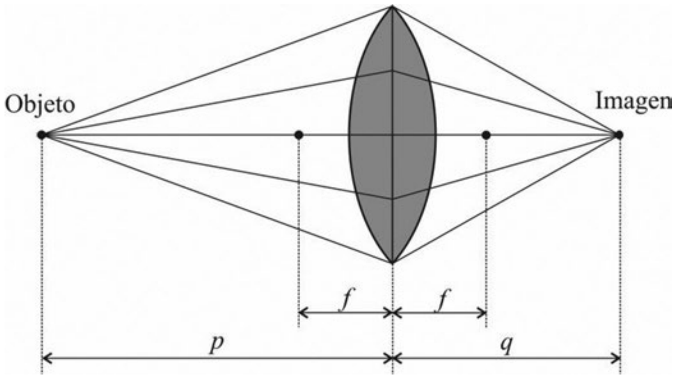
Cantidad de ácido puro: $0{,}30(10) + x = 0{,}50(10+x)$

$$3 + x = 5 + 0{,}50\,x$$
$$x - 0{,}50\,x = 5 - 3$$
$$0{,}50\,x = 2$$
$$x = 2 : 0{,}50$$
$$x = 4$$

Respuesta: Hay que agregar 4 ml de ácido a la solución original.

• Ejemplo 2: *Problema de Óptica*. Si una lente convexa tiene una longitud focal de **f** centímetros y si un objeto se coloca a una distancia de **p** centímetros de la lente con **p** > **f**, entonces la distancia **q** desde la lente a la imagen está relacionada con **p** y **f** a través de: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$.

Si **f** = 5 cm, ¿cuán cerca debe estar el objeto de la lente para que la imagen quede a más de 12 cm?



Se debe determinar los valores posibles de la distancia *p* entre el objeto y la lente sabiendo que la distancia *q* entre la imagen y la lente debe ser mayor que 12 cm, por lo cual es necesario despejar *q*,

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{f}-\frac{1}{p}=\frac{p-f}{fp}$$

$$q=\frac{fp}{p-f}$$

Del enunciado del problema se sabe que $p > f$, luego $p - f > 0$ **(1)**

Luego,

$$q = \frac{fp}{p - f} > 12$$

$$\frac{5p}{p - 5} > 12$$

De **(1)** resulta que $p - 5 > 0$, entonces:

$$5p > 12(p - 5)$$
$$5p > 12p - 60$$
$$60 > 7p$$
$$\frac{60}{7} > p$$

Por lo tanto, $5 < p < \frac{60}{7}$.

Respuesta: Para que la imagen quede a más de 12 cm de la lente, el objeto debe estar a más de 5 cm de distancia de la misma (pues $p > f$) y aproximadamente, a menos de 8,57 cm.

Resolver los siguientes problemas

1) *Temperatura de ebullición del agua.* La temperatura T (en ^{o}C) a la que hierve el agua está relacionada con la altura h (en metros sobre el nivel del mar) por la ecuación:

$h(T) = 1000(100 - T) + 580(100 - T)^2$, para $95 \leq T \leq 100$.

a) ¿A qué altura el agua hierve a 98^{o}C?

b) La altura del Monte Everest es de 8840 m aproximadamente. En la cima de la montaña, ¿a qué temperatura hierve el agua?

2) *Contaminación.* Si la contaminación del lago Erie se detuviera de pronto, se ha calculado que el nivel **y** de contaminantes disminuiría según la fórmula $y = y_0 e^{-0,3821t}$, donde t es el tiempo en años medido a partir de que se frena la contaminación e y_0 la contaminación en ese momento. ¿Cuánto tiempo habrá que esperar para reducir y_0 a la mitad?

3) *Terremotos.* Los logaritmos se utilizan para medir la magnitud de los terremotos. En la escala Richter, desarrollada por el sismólogo Charles F. Richter, la magnitud, *R*, de un terremoto está dada por $R = \log I$, donde I representa el número de veces que es más intenso el terremoto respecto de la actividad sísmica que puede medir un sismógrafo.

a) Si un terremoto mide 4 grados en la escala Richter, ¿Cuántas veces es más intenso respecto de la actividad sísmica más pequeña que se puede medir?

b) ¿Cuántas veces es más intenso un terremoto que mide 5 grados respecto de uno que mide 4 grados?

4) *Concentración de medicamento.* Para tratar la arritmia cardíaca, se aplica un medicamento al torrente sanguíneo en forma intravenosa. Suponer que la concentración C del fármaco después de t horas está dada por $C(t) = \dfrac{3{,}5t}{(1+t)}$ mg/L. Si el nivel terapéutico mínimo es 1,5 mg/L, indicar a partir de qué momento se rebasa ese nivel.

5) *Población.* Por causa de un brote de una enfermedad se ha solicitado a toda la población de una localidad, a través de avisos en los medios de comunicación, presentarse ante la autoridad Sanitaria para realizar un control médico. La siguiente expresión da aproximadamente la proporción de personas que se han presentado ante el médico luego de t días de realizado el anuncio $P(t) = 1 - e^{-0{,}3t}$.

a) Si en la localidad hay 10.000 personas: ¿Después de cuántos días se presentaron 6000 personas?

b) Las autoridades consideran que la campaña es efectiva si en dos semanas a partir del inicio se presenta más del 70% de la población. ¿Ha sido efectiva la campaña en este caso?

c) Los medios de comunicación informan que en dos semanas a partir del inicio de la campaña se han presentado exactamente el 70% de la población. Si la expresión que mide la proporción de personas que se presentan a control es: $P(t) = 1 - e^{\alpha . t}$. ¿Cuál es en este caso el valor de α?

6) *Descuento.* Un comerciante mayorista anuncia que todos los precios tienen efectuado el 15% de descuento sobre el precio de venta si se adquieren más de 5 prendas de cada tipo. Para obtener el precio de venta aplicar a cada producto el 85% sobre el precio de costo.

a) Obtener la expresión algebraica del precio de venta mayorista según el precio de costo.

b) ¿Qué porcentaje le aplica al precio de costo para obtener el precio de venta mayorista?

c) Si el precio de costo de un artículo, es de $568, ¿cuál es el precio de venta al por mayor, de este artículo?

Capítulo 3
Polinomios. Expresiones algebraicas

3.1 Definición de polinomio. Operaciones

1) Dado el siguiente polinomio: $p(x) = 5x^4 - 4x^2 + 3 - x$ responder:

a) ¿Cuál es el grado del polinomio?

b) ¿Cuál es su coeficiente principal? ¿Cuál el término constante?

c) ¿Está ordenado y completo? Si la respuesta es No, ordenarlo de manera creciente y completarlo.

d) ¿Cuánto vale el polinomio p(x) para x = 5? y ¿para x = –3? ¿Qué nombre reciben dichos valores?

e) ¿Cuánto vale el polinomio p(x) para x = 2t? ¿Qué nombre recibe dicho valor?

f) Dar los coeficientes a, b, c, d y e del polinomio $s(x) = a\,x^4 + bx(x^2 + x) + c\,x^2 + dx + e$ para que sea igual al polinomio p(x).

2) Escribir un polinomio de tercer grado completo y con coeficientes irracionales.

3) Escribir un polinomio de cuarto grado incompleto y con coeficientes enteros.

4) Dados los polinomios: $p(x) = -2x^3 + 8x^2 - 2x - 12$, $q(x) = 2 + 4x$ y $r(x) = x^2 - x - 2$, calcular:

a) $p(x) + q(x)$ b) $p(x) \cdot q(x) - r(x)$ c) $r(x) - p(x) \cdot q(x)$

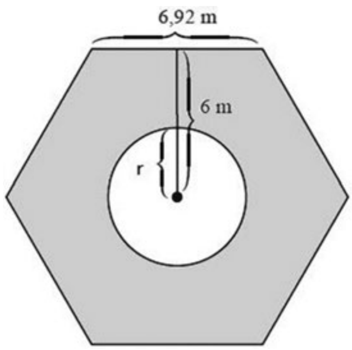
d) $p(x) \div q(x)$ e) $p(x) \div r(x) + q(x)$

5) Sean los polinomio no nulos $p(x)$ de grado m, $q(x)$ de grado n y $r(x)$ de grado 2, siendo $m > n > 2$. Hallar el grado del polinomio resultante en cada caso:

a) $p(x) + q(x) + r(x)$ b) $p(x) + q(x) - r(x)$ c) $p(x)\,q(x)\,r(x)$

d) $p(x) \div r(x)$ e) $p^3(x) \div q^2(x)$ f) $p^2(x)\,q(x) \div r(x)$

6) Encontrar el polinomio que expresa el área de la región sombreada en función del radio (r) del círculo.



7) Una empresa fabrica bloques cúbicos macizos para la construcción. El costo del material de relleno es de \$12 el metro cúbico. Tiene un costo de pintado de todas sus caras, el costo de este proceso es de \$2,50 por metro cuadrado de pintura. Por otro lado las aristas del cubo deben ir pulidas para evitar que se quiebren ya que son frágiles, este proceso de pulido agrega un costo de \$1,50 por metro lineal de arista. La empresa tiene un costo fijo de \$4 por cada cubo fabricado.

a) Expresar el costo de cada cubo como un polinomio en función de la medida del lado del cubo.

b) ¿Cómo quedaría la expresión del polinomio si tanto el costo del metro cuadrado de pintura como el metro lineal de pulido de aristas aumentan en un 40 %?

c) ¿Cómo quedaría expresado el polinomio si la longitud del lado del cubo aumenta un 40%?

3.2 Factorización de polinomios. Ruffini

Ejemplos de factorización:

$p(x) = x^5 - 5x^4 + 6x^3 = x^3 \cdot (x^2 - 5x + 6) = x^3 \cdot (x-2) \cdot (x-3)$ Se ha factorizado teniendo en cuenta que el término independiente, o término constante, es cero.

$q(x) = x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ Se ha aplicado una identidad notable para factorizarlo.

$r(x) = x^3 - 1 = (x-1) \cdot (x^2 + x + 1)$. La ecuación $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene soluciones reales.

$s(x) = 2x^2 + 3x + 1 = 2 \cdot (x+1) \cdot (x + 1/2)$. Coeficiente principal distinto de 1.

Ahora, para factorizar el polinomio $\mathbf{t(x) = x^4 - 15x^2 + 10x + 24}$, hay que tener en cuenta que las posibles raíces racionales de un polinomio de coeficientes enteros son cocientes que se obtienen de la forma $\left(\dfrac{\text{divisores del término independiente}}{\text{divisores del coeficiente principal}}\right)$.

En el caso del polinomio **t(x)**, el término independiente es 24 y sus divisores son: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 12, ± 24. El coeficiente principal es 1 y sus divisores ± 1. De modo que las posibles raíces racionales de **t(x)** son ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 12, ± 24.

Habrá que comenzar entonces, aplicando la regla de Ruffini para esos valores de la siguiente manera:

	1	0	–15	10	24
1		1	1	–14	–4
	1	1	–14	–4	$20 \neq 0$

Está claro que 1 no es raíz del polinomio dado, ahora probaremos con el valor –1:

	1	0	–15	10	24
–1		–1	1	14	–24
	1	–1	–14	24	0

Así se pudo encontrar una raíz del polinomio. Con lo cual con esta raíz hallada se puede comenzar a Factorizar el polinomio:

$\mathbf{t(x) = x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = (x + 1).(x^3 - x^2 - 14x + 24)}$. Se sigue, ahora, factorizando el polinomio de grado 3: $\mathbf{x^3 - x^2 - 14x + 24}$, cuyas posibles raíces son: –1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±8, ±12 ±24. Probando con Ruffini se llega a que una raíz es 2:

	1	–1	–14	24
2		2	2	–24
	1	1	–12	0

Con lo que $\mathbf{t(x) = (x + 1).(x - 2).(x^2 + x - 12)}$. Finalmente aplicando resolvente a la ecuación: $x^2 + x - 12 = 0$ se tiene que $x = 3$ y $x = -4$ son las raíces faltantes del polinomio, así finalmente: $\mathbf{t(x) = (x + 1).(x - 2).(x - 3).(x + 4)}$

Actividades:

1) Escribir tres polinomios que tengan a $x = 1$ como raíz, todos con grado menor o igual que 4.

2) Encontrar todas las raíces del polinomio dado, indicando el orden de multiplicidad de las mismas. Expresarlo de forma factorizada.

a) $p(x) = -2x^3 - 10x^2 + 2x^4 - 2x - 12$

b) $r(x) = 3x^3 - 18x^2 + 27x$

3)

a) ¿El polinomio $q(x) = x - 2$ es divisor del polinomio $p(x) = x^3.(x-2)^3 + x^4.(x-2)$?

b) Factorizar completamente p(x).

c) Indicar todas las raíces y el orden de multiplicidad de las mismas.

4) Averiguar el valor de *m* sabiendo que:

a) El polinomio $q(x) = x + 2$ es un factor del polinomio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 6 + mx$.

b) El polinomio $p(x) = x^3 - mx^2 + 2x + 8$ sea divisible por $q(x) = 2x - 4$.

5) Indicar si cada afirmación es verdadera o falsa. Justificar.

a) El polinomio $p(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 - 4x$ tiene cuatro raíces reales.

b) El polinomio $q(x) = x^2 + 2\sqrt{3}x + 3$ no se puede factorizar en R.

c) El polinomio $r(x) = -4x^3 - 2x^2 + 4x + 2$ es divisible por el polinomio $p(x) = x + 1$.

d) $\frac{1}{4}$ es una raíz de $q(x) = 8x^3 - 6x^2 + 5x - 3$.

e) $x = 2$ es raíz triple de $h(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$.

f) El polinomio $x^6 - 64$ es divisible por $x + 2$.

6) Hallar a y b para que el polinomio $p(x) = x^5 - ax + b$ sea divisible por $x^2 - 4$.

7) Dar un ejemplo de dos polinomios de grado 4 que sumados den uno de grado 2.

8) Si el valor numérico de un polinomio en 2 es igual a 3 y el cociente de su división entre $(x - 2)$ es x ¿cuál es el polinomio buscado?

9) ¿Existe algún valor de m para que el polinomio $x^3 + mx^2 - 2mx + 5$ sea divisible por $x - 2$?

10) Responder a cada una de las siguientes preguntas. Justificar la respuesta

a) Si la división de P(x) por (x-2) es exacta. ¿Qué puede afirmarse de P(2)?

b) Dado el polinomio $r(y) = -y \cdot (y + 2) \cdot (y - 1)^2 \cdot (y^2 - 4)$, ¿se encuentra $r(y)$ completamente factorizado?, ¿cuál es el grado y el coeficiente principal de $r(y)$?

c) ¿Es posible encontrar un valor para h en el polinomio $b(x) = hx^2 + 10 \cdot (2x + 1) + 15$ de modo que el trinomio sea el desarrollo del cuadrado de un binomio?

11) Hallar un polinomio $s(n)$ que cumpla con las siguientes características:

- Polinomio de grado 4.
- Tiene 3 raíces reales distintas.
- Dos de sus raíces son $n_1 = 3$ y $n_2 = -1$, donde n_1 es de multiplicidad 2 y n_2 es de multiplicidad simple.
- Su coeficiente principal es -2.
- El valor numérico de $s(n)$ es 20 para $n = 4$. ¿Es único $s(n)$?

12) ¿Es posible hallar el valor de m y n sabiendo que el polinomio $p(x) = x^3 + mx + nx + 4$ es divisible por $x - 1$ y que al dividirlo por $(x - 2)$ y $(x + 3)$ da el mismo resultado? Justificar la respuesta.

13) Halla un polinomio $p(x)$ tal que al dividirlo por $q(x)=x^2-x+3$ el cociente sea $c(x)=x^3-2x^2+4x-5$ y el resto 7.

14) Encontrar un número entero de tres cifras (abc) sabiendo que la suma de sus cifras es 11, la cifra de la decena es 4 y que si se intercambian las cifras de las unidades con el de las centenas, la diferencia de éste último con el número buscado da 297.

(Recordar que se puede descomponer un número en potencias de 10, por ejemplo, el número abcd puede escribirse abcd = $d\,.10^0 + c\,.10^1 + b.10^2 + a\,.10^3$)

3.3 Expresiones algebraicas fraccionarias

1) Simplificar reduciendo a la mínima expresión:

a) $\dfrac{x^2+9-6x}{x^2-9}$ b) $\dfrac{12x^2-3}{x^2+\frac{1}{2}x}$ c) $\dfrac{-x^2-14x-49}{2x^2+12x-14}$ d) $\dfrac{x^2-x+6}{2x^2-8}$

2) Resolver las siguientes operaciones con fracciones algebraicas, simplificando cuando corresponda y realizar las restricciones necesarias para que la expresión tenga sentido:

a) $\dfrac{x-2}{4}+\dfrac{3x+2}{6}$ b) $\dfrac{2}{5a^2}+\dfrac{1}{3ab}$ c) $\dfrac{2a-3}{3a}+\dfrac{3x+2}{10x}+\dfrac{x-a}{5ax}$

d) $\dfrac{m+3}{m-3}+\dfrac{m+2}{m-2}$ e) $\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-3}$ f) $\dfrac{m-n}{m+n}-\dfrac{m+n}{m-n}$

g) $\dfrac{2a+3}{4a}-\dfrac{a-2}{8a}$ h) $\dfrac{5x+25}{14}\cdot\dfrac{7x+7}{10x+50}$ i) $\dfrac{m+n}{mn-n^2}\cdot\dfrac{n^2}{m^2-n^2}$

j) $\dfrac{1-x}{a+1}\cdot\dfrac{a^2+a}{x-x^2}\cdot\dfrac{x^2}{a}$ k) $\dfrac{x-1}{3}:\dfrac{2x-2}{6}$ l) $\dfrac{x^3-x}{2x^2+6x}:\dfrac{5x^2-5x}{2x+6}$

m) $\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$ n) $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}$ o) $\dfrac{\frac{x^4-16}{x^2+4x+4}}{(x+2)}$

3) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) $\dfrac{m^3-3}{m^{\frac{1}{2}}+3m}$ es una expresión algebraica racional fraccionaria.

b) El dominio de $\dfrac{6x-18}{3x^2-27}$ es R – {–3}.

c) $\dfrac{3x+2}{\sqrt{5}}$ es una expresión algebraica racional fraccionaria.

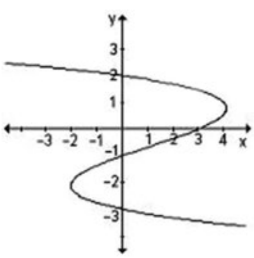
Capítulo 4

Función y Función de primer grado

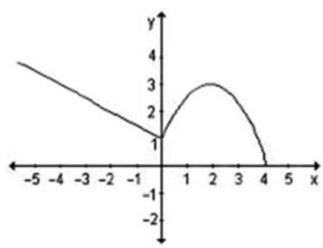
4.1 Función

1) Dadas las siguientes gráficas, analizar cuáles de ellas corresponden a una función de R en R. Justificar las respuestas.

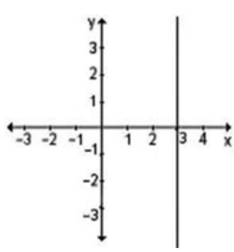
a)



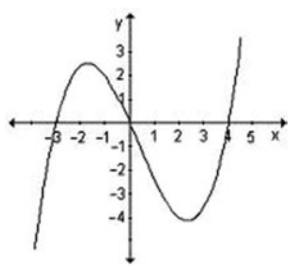
b)



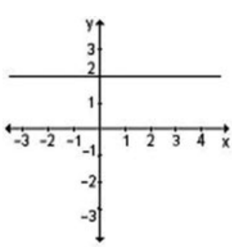
c)



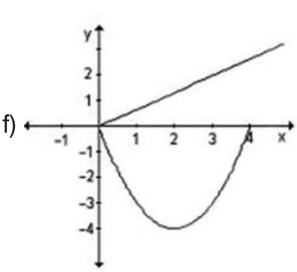
d)



e)



f)



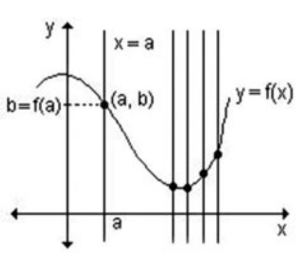
Para tener en cuenta:

Forma práctica para determinar si una gráfica corresponde a la gráfica de una función

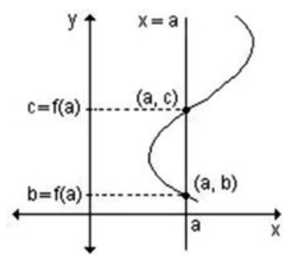
La gráfica de una función no puede presentar dos o más puntos con la misma abscisa "x". Esto significa que, si para cada valor del dominio trazamos una recta vertical, ésta debe cortar a la gráfica en un solo punto.

Esta forma de analizar si una gráfica es la de una función se conoce como "la prueba de la recta vertical" y se puede enunciar "para que una gráfica sea la gráfica de una función toda recta vertical, debe intersecar a la gráfica en un solo punto".

Gráficamente se observa:



Si cada recta vertical $x = a$ interseca a la gráfica una sola vez existe una sola imagen para cada $x = a$ dada por $f(a) = b$. En este caso la gráfica corresponde a una función.



Si una recta $x = a$ corta a la gráfica en dos puntos (a, b) y (a, c), no representa un función porque $x = a$ tendría así dos imágenes distintas $b = f(a)$ y $c = f(a)$.

2) Dadas las siguientes expresiones, determinar el dominio para que correspondan a funciones.

a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 3$

b) $g(x) = \dfrac{2}{(x+3)^2}$

c) $h(x) = \sqrt{x+3}$

d) $m(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x-2}}$

3) Dada la función $f: R \rightarrow R$, definida por $y = 2x^2 - 1$

a) Determinar las imágenes para $x = 1$, $x = 3$, $x = -2$, $x = -\dfrac{1}{3}$

b) Indicar si los siguientes pares de puntos pertenecen o no a la gráfica de la función.

$(-1,\ -3)$; $(\sqrt{2}, 3)$; $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$; $\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$

4.2 Función polinómica de primer grado o función lineal

1)

a) Representar gráficamente las funciones $y = 2x$; $y = -x$; $y = \frac{2}{3}x$; $2y + 3x = 0$

b) ¿Cuál es la característica común que presentan las gráficas? ¿En qué se diferencian?

2) Indicar si las siguientes expresiones corresponden a funciones lineales. Si la respuesta es afirmativa, indicar la pendiente, la ordenada al origen y graficar.

a) $6x + 3y + 2 = 0$ **b)** $2x - 3y = 0$ **c)** $2x^2 - 3y = 1$ **d)** $x.y - 4 = 0$

3) Considerando la función del ejercicio 2)a),

a) indicar las coordenadas de dos puntos que pertenezcan a su gráfica.

b) Hallar la abscisa del punto para el cual $y = -\frac{4}{3}$

4) Hallar el valor de k de manera tal que:

a) la recta de ecuación $2kx - 5y + 2k + 3 = 0$ tenga ordenada al origen 3

b) la recta de ecuación $(1 + k)x + 3y + 6k = 0$ tenga pendiente -1

c) la recta de ecuación $(2k - 1)x - 2y = 14$ pase por el punto $(2, -2)$

5) Se sabe que dos rectas pasan por el punto $(-2, -3)$. Una de ellas corta al eje de las ordenadas en $y = -1$. La otra tiene la propiedad que $y < 0$ para todo $x > -4$.

a) Encontrar la ecuación de ambas rectas.

b) Representar gráficamente la situación planteada.

c) Verificar analíticamente que $(-2, -3)$ es el único punto de intersección de las rectas.

6) Indicar si los siguientes pares de ecuaciones corresponden a rectas paralelas o secantes. En caso de ser secantes, analizar si son perpendiculares.

a) $-2x - 3y - 5 = 0$; $y = -2 - \frac{2}{3}x$

b) $2x + 3y = -6$; $x - \frac{3}{2}y = \frac{1}{2}$

c) $8 + 2y = 6x$; $2x + 6y = -3$

7) Sean las funciones de primer grado definidas de R en R dadas por las expresiones:

$f(x) = \frac{k+1}{2}x + 5$ y $g(x) = -\frac{2}{3k}x$. Determinar el valor de k para que sus gráficas resulten perpendiculares. Para dicho valor hallado, graficar ambas en un mismo sistema de coordenadas.

8) Dada la recta de ecuación $y = 3x - 2$, determinar las ecuaciones de dos rectas que pasen por el punto $(-1, 2)$ de manera tal que una sea paralela y la otra perpendicular a la dada.

Representar las tres rectas en un mismo sistema de coordenadas.

9) Analizar si las siguientes proposiciones son Verdaderas o Falsas. Justificar todas las respuestas:

a) La recta de ecuación $3x + y + 5 = 0$ es paralela a la recta de ecuación $y = -3x + 1$.

b) La recta de ecuación $2y - 3x + 10 = 0$ es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(-1, 3)$ y $(1, 6)$.

c) La recta de ecuación $\frac{-8}{5}x + 4y = 12$, corta a la recta de ecuación $5y + 20 = 2x$ en exactamente un punto.

d) El punto $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ pertenece a la recta que pasa por $(-1, 2)$ y $(3, 1)$.

10) Los consumidores demandan 40 unidades de un producto cuando el precio por unidad es \$12 y 25 unidades si el precio es de \$18 por unidad. Considerando que el precio es función de primer grado de la demanda,

a) Escribir la función que expresa la relación entre el precio y la demanda.

b) Indique el dominio de la función obtenida.

c) ¿Cuál será el precio por unidad si se demandan 30 unidades?

d) ¿Cuántas unidades demandan los consumidores si el precio por unidad es de \$24?

e) Realizar la gráfica de la función.

Nota: Entre las funciones que se utilizan en economía para modelar situaciones de mercado se estudian las funciones de oferta y de demanda.

• *Función de oferta:* una empresa que fabrica y vende un determinado producto utiliza esta función para relacionar la cantidad de productos que está dispuesta a ofrecer en el mercado con el precio unitario al que se puede vender esa cantidad. Si p representa el precio por unidad y q la cantidad ofrecida, la ley que relaciona p y q se denomina función de oferta y a su gráfica se la conoce como gráfica de oferta.

La función oferta se puede simbolizar $p = o(q)$ donde p es el precio unitario y q la cantidad de productos que, a ese precio, se ofrece en el mercado.

• *Función de demanda:* La empresa utiliza esta función para relacionar la cantidad de productos demandada por los consumidores, con el precio unitario al que se puede vender esa cantidad, de acuerdo con la demanda. Si el precio por unidad de un producto está dado por p y la cantidad correspondiente en unidades está dada por q la ley que los relaciona se denomina función de demanda. A su gráfica se la llama gráfica de demanda.

Si p es el precio unitario y q la cantidad de productos que, a ese precio, se demanda en el mercado, la función demanda se simboliza $p = d(q)$.

11) Dado el siguiente problema, expresar el enunciado en términos algebraicos, identificar las variables, hallar la solución y responder en lenguaje natural (o coloquial) las preguntas formuladas al problema dado.

Una empresa de alquiler de autos cobra \$5 por cada km recorrido por el cliente que lo utilice. Otra empresa de la competencia cobra \$150 fijos más \$2 por cada km recorrido por el cliente.

a) Calcular el costo total de recorrer **x** km para cada una de las empresas.

b) ¿Cuál es el kilometraje con el cual resulta indistinto alquilar el auto con cualquiera de las dos empresas?

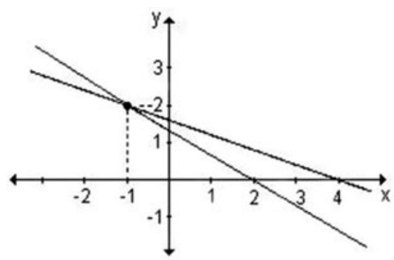
12)

a) Hallar, si existe, el punto (x, y), solución del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0 \\ 5x + y + 9 = 0 \end{cases}$

b) Graficar las rectas correspondientes a ambas ecuaciones y verificar lo obtenido en el ítem anterior.

c) Hallar la expresión analítica de la recta que pase por el punto (x_0, y_0) obtenido en el ítem a) y que resulte perpendicular a $2x - y + 1 = 0$.

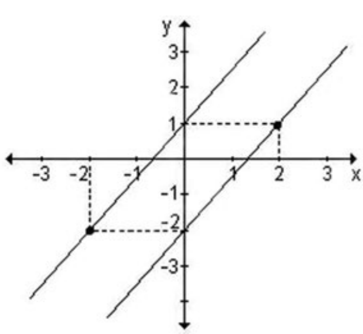
13) Dado el siguiente gráfico:



a) Determinar el sistema de ecuaciones cuya solución corresponda a la gráfica dada.

b) Resolver el sistema obtenido y verificar que la solución es (–1, 2).

14) Dado el siguiente gráfico:



a) Determinar el sistema de ecuaciones cuya solución corresponda a la gráfica dada.

b) Resolver el sistema obtenido y verificar que carece de soluciones.

15)

a) Resolver el sistema $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ \dfrac{-4}{3}x + 2y = \dfrac{-2}{3} \end{cases}$.

b) Representar gráficamente el sistema y verificar la respuesta obtenida en el ítem a).

16) Dado el sistema $\begin{cases} x + ky = 4 \\ px + 3y = 21 \end{cases}$, determinar los valores de k y p para que corresponda a dos rectas que se intersecan en el punto (–6, 5).

17) Sean las rectas de ecuaciones: $ky + 2x = 3$; $kx - y = 5$.

a) Determinar el valor de **k** para que se corten en un punto situado sobre el eje de las ordenadas.

b) Para dicho valor de **k**, dar las coordenadas del punto de intersección.

18) Dos rectas tienen por ecuaciones: $2py + x = 4$; $px - y = 3$.

a) Determinar el valor de **p** para que se corten en un punto situado sobre la recta $y = x$.

b) Para dicho valor de **p**, dar las coordenadas del punto.

19) Dado el siguiente problema, expresar el enunciado en términos algebraicos, identificar las variables, hallar su solución y responder en lenguaje natural (o coloquial) las preguntas formuladas al problema dado.

Una empresa que fabrica patinetas, tiene un costo fijo diario de \$200 y ha determinado que el costo de fabricar cada patineta es de \$8.

a) Encontrar la expresión que da el costo total de producir x patinetas por día.

b) Determinar la expresión del ingreso total de la empresa al vender x patinetas por día a \$16 cada una.

c) Determine las coordenadas del punto en el cual los costos son iguales a los ingresos.

20) En una planta industrial trabajan 160 personas. Por seguridad usan gafas el 16% de los hombres y el 20% de las mujeres. Si el número total de personas que usan gafas es 30, ¿cuántos hombres y mujeres hay en la empresa?

21) Un inversionista ha colocado un cierto capital al 4% una parte y al 5% la otra, recibiendo anualmente un interés de \$1100. Si hubiera invertido las partes al revés, recibiría al año \$50 más en concepto de intereses. ¿Qué cantidad de dinero ha invertido?

22) Si se le suma uno al numerador de una fracción y al denominador se le suma 3, la fracción es $\frac{1}{2}$, mientras que si al numerador se le suma 2 y al denominador se le resta 1, la fracción resulta 2. Halle la fracción.

23) En un colegio de la ciudad, a los alumnos que deciden comenzar los estudios secundarios se les hace un test con 30 preguntas sobre distintos temas de Matemática. Por cada pregunta contestada correctamente se suman 5 puntos y por cada pregunta incorrecta o no contestada se quitan 2 puntos. Un alumno que obtuvo 94 puntos, ¿cuántas preguntas respondió correctamente?

24) Dada la función de primer grado $f(x) = ax + b$, hallar los valores de **a** y **b** de manera tal que: $\begin{cases} 2f(0) = f(1) \\ f(2) = 6 \end{cases}$

25) Gastos en una empresa. Una constructora requiere decidir cuál máquina comprar. El modelo A cuesta \$50.000 y requiere \$4.000 anuales de mantenimiento; el modelo B tiene un precio de \$4000 y un costo de mantenimiento de \$5500 al año. ¿Durante cuántos años se usará el modelo A antes de que se vuelva más económico que el B?

26) Encontrar las soluciones de las siguientes inecuaciones considerando $x \in R$, representar en la recta y escribir la solución como intervalo.

a) $3x - 2 < 5$ b) $-2x - 4 \leq 6$

27) Encontrar la solución de los siguientes sistemas y representar sobre la recta real. Escribir la solución como intervalo.

a) $\begin{cases} 2x - 1 \leq 3 \\ 5 - 3x \leq -4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 1 \leq 8 \\ 3 - 2x < 9 \end{cases}$

28) Representar gráficamente la función $y = \frac{1}{2}x - 1$. Analizando la misma, determinar para qué valores reales de x se verifica que:

a) $y = 0$ b) $y > 0$ c) $y < 0$ d) $y \leq 2$ (agregar a la gráfica anterior la gráfica de la recta $y = 2$)

29) Cada m^2 de azulejos vale \$7 y su colocación cuesta \$15 (por metro cuadrado). El corralón recarga \$20 de flete.

a) Escribir la función que expresa el costo respecto de la superficie cubierta.
b) Señalar el dominio de esta función.
c) ¿Cuál es el costo de cubrir 12 m^2?
d) ¿Cuántos m^2 de azulejos se pueden colocar gastando \$460?

30) En la página de ciencias de Página 12 del 18 de abril de 2007, Leonardo Moledo hace una entrevista al físico Daniel de Florian, que trabaja en la Universidad Nacional de Buenos aires. Seguramente conoce la estructura del átomo formado por protones, neutrones y electrones. También habrá oído hablar de los quarks que forman a los protones y neutrones, pero ahora están a la búsqueda de una partícula subatómica hipotética, o sea se la supone teóricamente pero no se tiene pruebas de su existencia, llamada "bosón de Higos" o también con el apodo de "partícula divina". Para poder detectarla se está construyendo en un lugar entre Francia y Suiza el más grande acelerador colisionador de partículas hasta la actualidad, debe ser a 100 m bajo tierra y tener una circunferencia de 27 km por los cálculos que han realizado.

a) ¿Qué diámetro debe tener el foso profundo?

b) La expresión $l = \pi.d$, o $y = \pi.x$, es una función de primer grado. Representarla gráficamente y ubicar el punto que corresponde a la solución de a).

31) Hallar la base y la altura de un rectángulo sabiendo que si se aumenta 3 cm a la altura y se disminuye 2 cm a la base, su área no aumenta ni disminuye, siendo además la altura 2 cm mayor que la base.

32) La dosis recomendada de determinado medicamento (medida en mg) es una función lineal del peso x del paciente, expresado en kg. Sabemos que a un paciente de 10 kg de peso se le debe administrar 23 mg diarios de la sustancia, mientras que un paciente de 50 kg de peso debe recibir 63 mg del fármaco. Determinar la función que expresa la dosis correcta para un individuo que pese x kg. Grafica esta función.

33) El costo total de 5 libros de texto y 4 lapiceras es de $197 y el costo total de 6 libros de textos iguales a los anteriores y 3 lapiceras es de $204. Hallar el costo de cada libro de texto y de cada lapicera.

34) Un comerciante mayorista anuncia que todos los precios tienen efectuado el 15% de descuento sobre el precio de venta si se adquieren más de 5 prendas de cada tipo. Para obtener el precio de venta aplica a cada producto el 85% sobre el precio de costo.

a) Obtener la expresión algebraica del precio de venta mayorista según el precio de costo.

b) ¿Qué porcentaje le aplica al precio de costo para obtener el precio de venta mayorista?

c) Si el precio de costo de un artículo, es de $568, ¿cuál es el precio de venta al por mayor, de este artículo?

Capítulo 5
Función Cuadrática

5.1. Forma canónica de la función cuadrática

La forma canónica de la función cuadrática es:

$\mathbf{f(x) = a(x - h)^2 + k}$ con **a**, **h** y **k** números reales, $\mathbf{a} \neq 0$

La representación gráfica de esta función es una parábola.

En esta expresión podemos distinguir lo siguiente:

- Si $a > 0$ la parábola abre hacia arriba
- Si $a < 0$ la parábola abre hacia abajo
- El punto (h, k) es el vértice de la parábola.
- k es el valor mínimo si $a > 0$ y es el valor máximo si $a < 0$.

La demostración de lo anterior se basa en técnicas del “Cálculo Diferencial” y que escapan a los contenidos de este curso disciplinar de ingreso.

- La ecuación del eje de simetría es $x = h$.

Analicemos en un *ejemplo* una manera de representar gráficamente a:

$y = -2\,(x + 4)^2 - 2$

Comenzamos con identificar los parámetros, resultando $a = -2$ (negativo), $h = -4$ y $k = -2$. Entonces, la parábola abre hacia abajo, el vértice es el punto $(-4, -2)$. El eje de simetría es la recta vertical $x = -4$. Obtenemos también los puntos de intersección de la gráfica con los ejes coordenados. Así, si $x = 0$, y resulta igual a -34; por tanto, el punto de intersección con el eje y es: $(0, -34)$.

Para buscar las intersecciones con el eje x, planteamos la ecuación, haciendo $y = 0$,

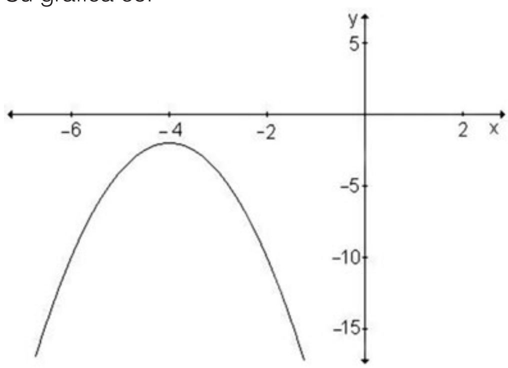
$-2\,(x + 4)^2 - 2 = 0$, despejamos x,

$$(x + 4)^2 = \frac{2}{-2}$$

$$(x + 4)^2 = -1$$

Si “miramos” atentamente la igualdad observamos que es imposible que el cuadrado sea un número negativo, es decir, que no existe x tal que $(x + 4)^2 = -1$. Por lo tanto, podemos concluir que la función no presenta intersección con el eje x.

Su gráfica es:



5.2 Forma polinómica de la función cuadrática

La forma polinómica de la función cuadrática está dada por un polinomio de segundo grado, es decir, una expresión de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in R$, $a \neq 0$.

Observaciones:

• Si la función cuadrática está dada en forma polinómica $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$, es posible escribirla en la forma canónica $\mathbf{f(x) = a(x - h)^2 + k}$, empleando el procedimiento de completar cuadrados (página 229 del libro).

• De manera recíproca, si la función está dada en forma canónica $\mathbf{f(x) = a(x - h)^2 + k}$, es posible escribirla en la forma polinómica $\mathbf{f(x) = ax^2 + bx + c}$ desarrollando el cuadrado del binomio $(x - h)$.

Gráfica de la función cuadrática:

Para dibujar la parábola, que es la gráfica de una función cuadrática cuando está expresada en forma polinómica, se puede proceder del siguiente modo:

a) Determinar el vértice. Para ello, calcular la abscisa del vértice a partir de los parámetros **a**, **b** y **c** que aparecen en su ecuación:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Luego calcular la ordenada del vértice como la imagen de la abscisa del vértice a través de la función, es decir, determinar $f(x_v)$.

Marcar en el gráfico el punto obtenido $(x_v, f(x_v))$

b) Calcular las abscisas de los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje x, conocidas como ceros de la función. La forma de calcularlas se explica en el libro desde la página 233.

Señalar posteriormente las raíces obtenidas en el gráfico.

Recordar que la Fórmula Resolvente (página 233) se aplica para calcular los ceros de una función de segundo grado dada en la forma polinómica. Si b y/o c son ceros, las raíces pueden calcularse aplicando otras técnicas algebraicas como transposición de términos (analizar los ejemplos c), d) y e) de las páginas 234 y 235 del libro).

c) Si en el ítem b) no se obtuvieron raíces reales o la función tiene una única raíz real, para realizar la gráfica se puede recurrir al cálculo de la ordenada al origen de la función, es decir, f(0) cuyo valor es igual al término independiente c de su ecuación polinómica. Señalar en el grafico dicho punto, es decir, (0, c) y aprovechar la simetría de la parábola para construir la otra rama de la misma.

d) El eje de simetría de la parábola es la recta perpendicular al eje x que contiene a la abscisa del vértice, es decir, la recta $x = \frac{-b}{2a}$.

En los siguientes ejemplos se presentan los cálculos explicados precedentemente y cómo se trasladan inmediatamente al plano cartesiano para construir la gráfica de una función de segundo grado.

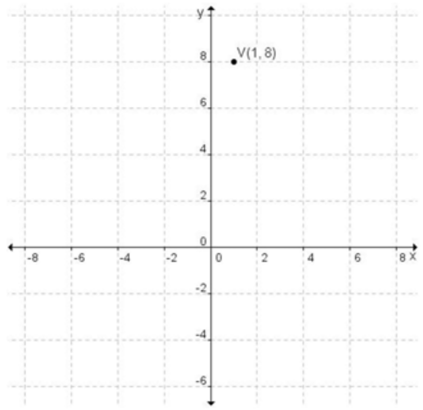
Ejemplos:

1) Representar gráficamente la función **$f(x) = -2x^2 + 4x + 6$.** Primero, identificamos los parámetros, a = –2, b = 4, c = 6.

a) Calculamos el vértice:

Abscisa $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2.(-2)} = 1$ Ordenada: $f(1) = -2.1^2 + 4.1 + 6 = 8$

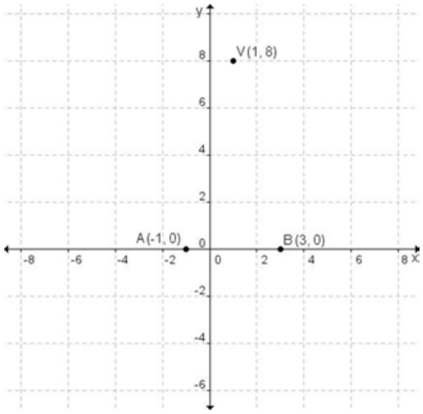
De modo que el vértice de la parábola es V(1, 8)



b) Calculamos los ceros de la función, para lo cual $-2x^2 + 4x + 6 = 0$

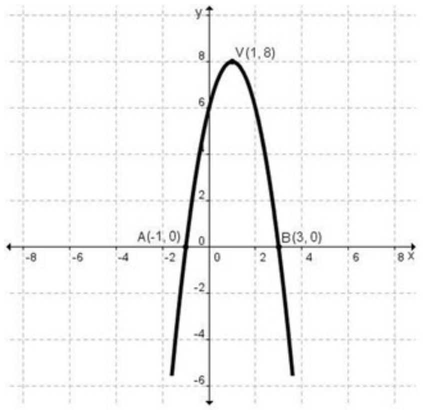
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.(-2).6}}{2.(-2)} = \frac{-4 \pm 8}{-4}$$

Entonces las raíces de la ecuación son $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$.

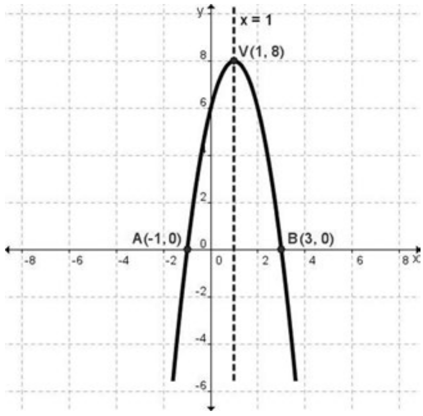


Observar que la abscisa del vértice es la semisuma de las dos raíces halladas, es decir que $x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$, por lo que el punto de coordenadas $(x_v, 0)$ es el punto medio de los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$. Además, podemos expresar f(x) en forma factorizada de la siguiente manera: $f(x) = -2\,(x - 3)\,(x + 1)$.

Con los elementos hallados se puede esbozar la gráfica uniendo el vértice y las raíces:



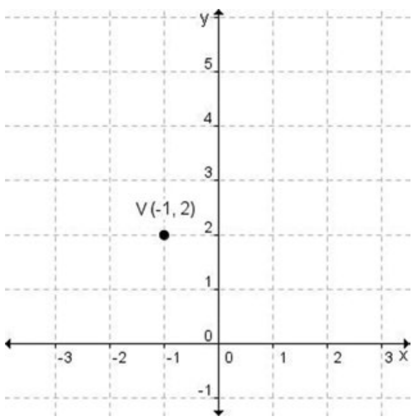
c) Dibujamos e indicamos la ecuación del eje de simetría:



Ecuación del eje de simetría: $x = 1$, recta vertical que pasa por la abscisa del vértice.

2) Sea la función $g(x) = x^2 + 2x + 3$. Los parámetros son $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$.
Calculamos las coordenadas del vértice:
Abscisa $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2.1} = -1$ Ordenada: $g(-1) = (-1)^2 + 2.(-1) + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$

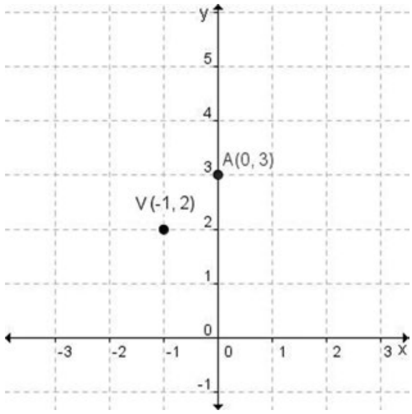
Entonces el vértice de la parábola es V(–1,2).



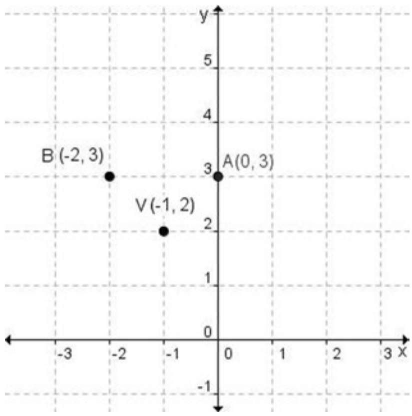
a) Calculamos las raíces

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.3}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$. Como $\sqrt{-8} \notin$ R, la función no tiene ceros reales. Geométricamente la parábola no interseca al eje x.

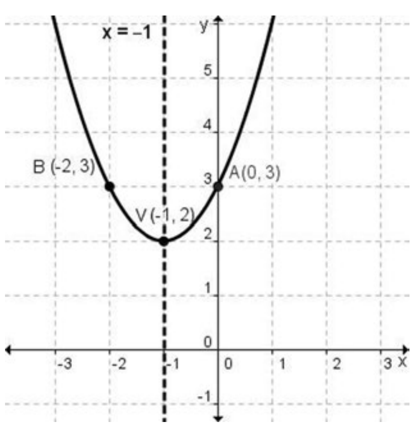
b) Se señala en el eje de las ordenadas, la ordenada al origen, en este caso, 3.



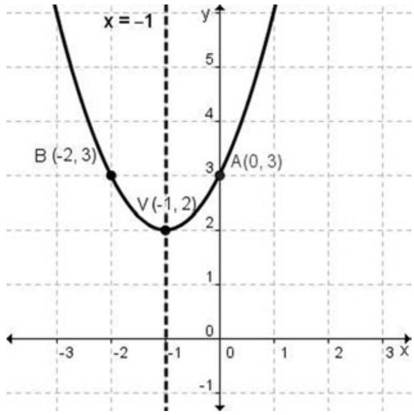
El punto simétrico respecto del eje de simetría de la parábola de A(0,3), es el punto (–2,3).



Con los datos obtenidos se esboza la parábola que abre hacia arriba.



c) Trazamos el eje de simetría que es la recta x = –1, resultando:



3) Sea la función $\mathbf{h(x) = -x^2 + 5x - \frac{25}{4}}$. Los parámetros son a = –1, b = 5, c $= -\frac{25}{4}$.

A continuación se presentan los cálculos realizados y posteriormente los gráficos en secuencia:

a) Cálculo del vértice:

Abscisa $x_V = \frac{-b}{2a} = \frac{-5}{2.(-1)} = \frac{5}{2}$. Ordenada: $h\left(\frac{5}{2}\right) = -\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 5.\left(\frac{5}{2}\right) - \frac{25}{4} = 0$

Entonces el vértice es $V\left(\frac{5}{2},0\right)$ (Figura 1)

b) Cálculo de las raíces

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.(-1).(-\frac{25}{4})}}{2.(-1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{5}{2}$. Entonces los dos ceros de la función son $\frac{5}{2}$.

c) Para determinar otro punto de la grafica, señalamos la ordenada al origen que es el punto (Figura 2)

Eje de simetría es la recta $x = \frac{5}{2}$. Marcar en el gráfico el punto simétrico del anterior con respecto al eje de simetría de la parábola. Es el punto B(5; –6,25) (Figura 3).

d) Unir los tres puntos para obtener la gráfica de la función h(x) (Figura 4).

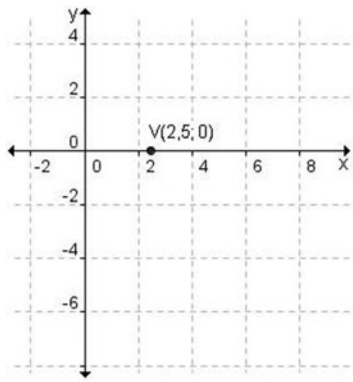


Figura 1

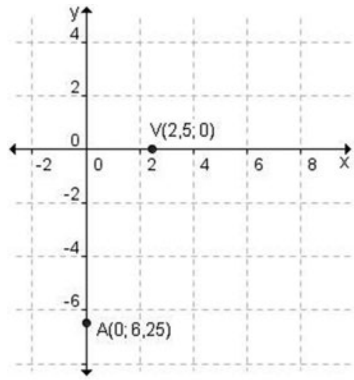


Figura 2

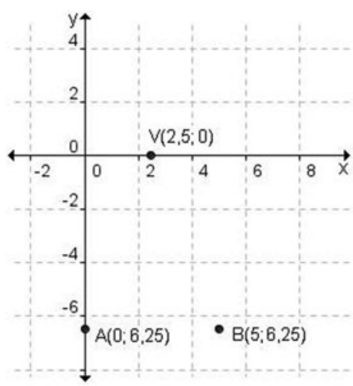


Figura 3

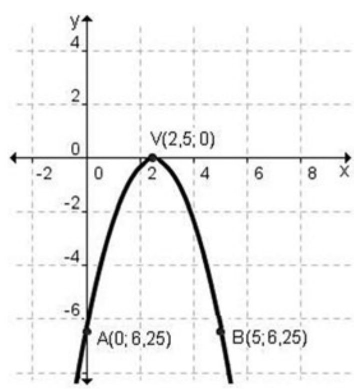


Figura 4

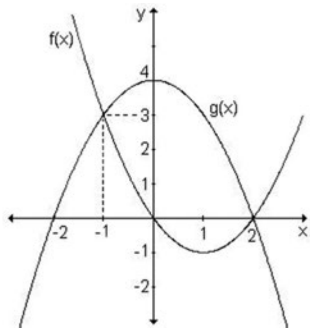
Observación: Si el coeficiente del término cuadrático "a" es positivo entonces la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, alcanza su mínimo en la ordenada del vértice $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$. Análogamente si "a" es negativo, entonces en la ordenada del vértice se halla el máximo valor de la función.

Además, podemos expresar h(x) en su forma factorizada, resultando:

$$\mathbf{h(x)} = -\mathbf{x^2} + \mathbf{5x} - \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{4}} = -\mathbf{1}\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}}$$

5.3. Actividades y Problemas

1) Dada la siguiente gráfica:



Determinar:

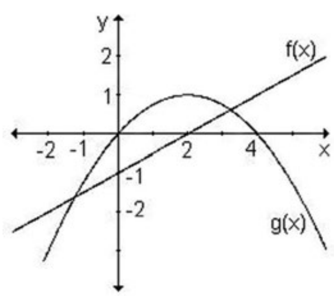
a) El intervalo donde cada función es positiva.

b) Las coordenadas de los puntos donde f(x) = g(x).

c) El o los intervalos donde f(x) > g(x).

d) El o los intervalos donde f(x) ≥ g(x).

2) Dado el siguiente gráfico:



a) Determinar las ecuaciones de cada una de las funciones graficadas.

b) ¿Para cuáles valores del dominio de y = f(x) es f(x) > 1?

c) ¿Para cuáles valores del dominio de y = g(x) es g(x) < 0?

3) Dada la función: f(x): $y = x^2 - 4x + 3$.

a) Representar gráficamente dicha expresión.

b) Determinar los intervalos en los cuales la función es:

i) positiva.

ii) negativa.

iii) creciente.

iv) decreciente.

c) Calcular las coordenadas de los puntos donde la función:
i) corta a los ejes coordenados.
ii) alcanza su valor máximo o mínimo.
d) Calcular los valores de x de tal manera que cumpla:
i) $f(x) = 0$
ii) $f(x) = 4$
e) Dada la función g: $y + x = 3$, represéntala en el mismo sistema de coordenadas.
i) Determinar el intervalo donde $g(x)$ es positiva.
ii) Calcular las coordenadas de los puntos donde $f(x) = g(x)$.
iii) Determinar el o los intervalos donde $f(x) > g(x)$.

4) Dadas las funciones g(x): $y = 1 - x^2$ y f(x): $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

a) Representar gráficamente ambas funciones en el mismo sistema de ejes de coordenados.
b) Determinar los intervalos en los cuales cada función es:
i) positiva.
ii) negativa.
iii) creciente.
iv) decreciente.
c) Calcular las coordenadas de los puntos donde cada función:
i) corta a los ejes coordenados.
ii) alcanza su valor máximo o mínimo, si es posible.
d) Observando las dos funciones:
i) Calcular las coordenadas de los puntos donde $f(x) = g(x)$.
ii) Determinar el o los intervalos donde $f(x) < g(x)$.
iii) Determinar el o los intervalos donde $f(x) \leq g(x)$.

5) Dada la ecuación de segundo grado: $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales positivos. ¿Es posible que las raíces sean ambas negativas? ¿Es posible que las raíces sean ambas positivas? Justificar las respuestas.

6) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones analíticamente, verificar la respuesta en forma analítica y gráfica. ¿Cuántas soluciones tiene cada sistema?

a) $\begin{cases} y + 6 = 3(x - 2)^2 \\ y = 6 + 2x \end{cases}$ b) $\begin{cases} -1.5x^2 + 1200 = y \\ 200 + x^2 - y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 = y \\ y = -x^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y = 5x^2 + 1 \\ y = -1 \end{cases}$

7) La función Ingreso I para un determinado producto de una industria está dada por $I(x) = -x^2 + 3000x$, donde x es la cantidad de productos producidos y vendidos e I está expresado en pesos. ¿Cuál es la cantidad de productos que se deben vender para lograr el máximo ingreso? ¿Cual es el ingreso máximo?

8) Desde la azotea de un edificio se lanza un objeto hacia arriba. La distancia d(t), medida en metros, que hay entre el objeto y el suelo a los t segundos de haber sido lanzado está dada por $d(t) = -44t^2 + 44t + 33$. ¿A cuántos segundos se produce la distancia máxima entre el objeto y el suelo y cuál es esa distancia?

9) Un estudio de mercado determinó que la función de demanda para un determinado producto responde a $p(q) = -0{,}25q + 200$, donde p representa el precio por unidad y q la cantidad demandada de dicho producto. Con estos datos determinar:

a) La función ingreso si Ingreso = precio x cantidad.

b) Indique el dominio de la función ingreso.

c) Cuánto se debe vender para obtener el ingreso máximo y cuál es el monto de dicho ingreso y el precio al cual se debe vender el producto.

10) Dada la función cuadrática $f(x) = -(x-3)^2 + 9$, la recta r1 que pasa por el punto (1,5) y (2,0) y la recta r2 que pasa por los puntos (2, 0) y (4, 8).

a) Hallar la expresión analítica de las rectas r1 y r2.

b) Hallar los puntos de intersección de la parábola y la recta r1.

c) Hallar los puntos donde coinciden la parábola y la recta r2.

d) Representar gráficamente la función cuadrática y las rectas, en un mismo sistema de coordenadas.

11) Hallar en cada ítem la ecuación de la función de segundo grado de la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$, a partir de los datos:

a) $f(1) = 0$, $f(2) = 0$ y el coeficiente principal es 1.

b) Siendo el coeficiente del término cuadrático –1 y $x = (-3)$ una raíz doble.

c) $f(1) = 37$ y la gráfica de f es una parábola con vértice en el punto (–3, 5).

12) Si una raíz de la ecuación $x^2 + kx - 2 = 0$, es $x = 1$ obtener el valor de k y la otra raíz.

13) Hallar el valor de k para que el producto de las raíces de la ecuación $(k-2)x^2 - 5x + 2k = 0$ sea 6.

14) Encontrar el conjunto solución de las siguientes desigualdades:

a) $x^2 + 2x \geq 15$

b) $5x^2 - 2x + 1 < x^2 + 2x$

Capítulo 6
Resolución de triángulos rectángulos

6.1 Ángulos

1)

a) Decidir si sen 1° es menor, igual o mayor que sen 1.

b) Hacer lo mismo con cos 1° y cos 1.

2) Expresar en radianes la magnitud del ángulo que forman las agujas del reloj cuando ellas indican las 2h, 6h, 8h.

3) Dos ángulos de un triángulo tienen 59° y 69°. Calcular en radianes la magnitud del tercer ángulo del triángulo.

4) Dos ángulos de un triángulo son de $\frac{3\pi}{10}$ (rad) y $\frac{2\pi}{15}$ (rad). Calcular cuántos grados mide el tercer ángulo.

5) El arco de una circunferencia de radio 6 cm tiene una longitud de 4,5 cm. ¿Cuál es la medida en radianes de dicho arco?

6) Hallar la longitud del arco de circunferencia si su radio es de 22,5 cm y su ángulo central mide 40°30'.

7) El arco de una circunferencia es de 200°. Determinar el radio de circunferencia si la longitud del arco es de 50 cm.

8) Hallar el perímetro y el área del sector del círculo, cuyo radio es de 15 cm, si el arco tiene 54°.

9) Una rueda dentada tiene 90 dientes. Expresar en radianes el ángulo de rotación de la rueda cuando ella gira **a)** 30 dientes, **b)** 25 dientes, **c)** 40 dientes, **d)** 200 dientes.

6.2. Algunas identidades trigonométricas y relación entre las razones trigonométricas

1) Demostrar las siguientes identidades. Se supone que el ángulo α toma valores para los cuales todas las cantidades involucradas están definidas:

a) $(1-\text{sen}^2\alpha)(1+\text{tg}^2\alpha)=1$

b) $\dfrac{\text{sen}\alpha}{1+\text{cotg}^2\alpha}=\text{sen}^3\alpha$

c) $(2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)^2+(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha)^2=1$

d) $\dfrac{1}{1-\text{sen}\alpha}+\dfrac{1}{1+\text{sen}\alpha}=2\sec^2\alpha$

e) $\dfrac{1+\text{tg}^2\alpha}{1+\text{cotg}^2\alpha}=\text{tg}^2\alpha$

2)

a) Sabiendo que $\text{sen}15^{\circ}=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}$, calcular cos 15° y tg 15°.

b) Utilizando los valores obtenidos en el ítem anterior, y de dos maneras distintas, comprobar la validez de la siguiente identidad $\dfrac{1-\text{tg}^2 15^{\circ}}{1+\text{tg}^2 15^{\circ}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$:

.

3) Si α es un ángulo del primer cuadrante y $\text{tg}\alpha=\dfrac{2}{5}$, comprobar que $\dfrac{\text{sen}\alpha-\cos\alpha}{\text{sen}\alpha+\cos\alpha}=-\dfrac{3}{7}$

4)

a) Mostrar que $\text{tg}\alpha+\text{cotg}\alpha=\dfrac{1}{\text{sen}\alpha\cos\alpha}$, para todos los valores de α para los cuales ambos miembros de la igualdad estén definidos.

b) Utilizando el ítem anterior, mostrar que si $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, la cantidad (tg α + cotg α) siempre es mayor o igual que 1. Probar también que, en realidad dicha cantidad, nunca puede valer 1.

c) Mostrar que si $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ y tg α + cotg α = 2, entonces también $\text{tg}^2\alpha+\text{cotg}^2\alpha$ es igual a 2.

5) Dado un triángulo de lados 4 cm, 5 cm y 6 cm, calcular la altura sobre el lado menor y su área.

6) a) La base de un triángulo isósceles mide 1 m y el ángulo opuesto 30. Calcular el perímetro y el área del triángulo.

b) Este ítem generaliza el anterior. La base de un triángulo isósceles es igual a **l** y el ángulo opuesto vale α entonces su perímetro **P** y su área **A** están dados por las siguientes fórmulas: $P=l\left(\dfrac{1}{\text{sen}\frac{\alpha}{2}}+1\right)$ y $A=\dfrac{l^2}{4}\dfrac{1}{\text{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

c) Escribir las fórmulas para **P** y **A** del ítem anterior cuando, en particular, el triángulo es equilátero.

7) a) Calcular el área de un hexágono regular de lado 1 m.
Sugerencia: Tener en cuenta que un polígono regular de **n** lados es la unión de **n** triángulos isósceles cuyos lados iguales son los radios de la circunferencia circunscripta.
b) Usando el ítem b) del ejercicio anterior obtener una fórmula para calcular el área de un polígono regular de **n** lados.

6.3 Problemas que involucran resolución de triángulos rectángulos

Para cada enunciado, esbozar una figura de análisis, plantear el problema, resolverlo y expresar la respuesta.

1) Desde cierto lugar del suelo se observa el punto más alto de una torre con ángulo de elevación de 30°, y al acercarse 50 m a la torre se observa el punto más alto de la torre con un ángulo de 60°. Calcular la altura de la torre y la distancia a la que se encontraba inicialmente el observador de la torre. Despreciar la altura del observador.

2) Desde el patio de una casa se ve el extremo superior de una antena de transmisión de celulares con un ángulo de elevación de 30°. Si nos alejamos 20 m en línea recta, el ángulo de elevación ahora es de 20°. ¿Cuál es la altura de la antena? Despreciar la altura del observador.

3) Hallar el área del terreno triangular cuyo frente mide 30 m, sabiendo que los ángulos que forma el frente con los otros dos lados son de 42° y 48° respectivamente.

4) Frente a un edificio ubicado en la avenida costanera de la ciudad de Santa Fe se encuentra un árbol. La distancia entre el pie del árbol y la base del edificio es de 15m. Desde una ventana del edificio se observa que el ángulo de elevación hasta la parte superior del árbol es de 29° y el ángulo de depresión a la parte inferior es de 20°. ¿Cuál es la altura del árbol? ¿A qué altura está la ventana?

5) Un aeroplano vuela a cierta altura directamente por encima de una carretera recta. Dos automóviles se desplazan sobre la carretera en lados opuestos del aeroplano. Desde el aeroplano los ángulos de depresión son, a un automóvil de 75º y al otro de 85º. Si las posiciones de los dos automóviles distan entre sí 1000 m, ¿a qué altura vuela el aeroplano?

6) De un triángulo rectángulo se sabe que la suma de los catetos es de 15 cm y que uno de los ángulos agudos es la mitad del otro. Calcular la medida de la hipotenusa.

Respuestas

Capítulos 1 y 2. Números

1.1 Conjuntos numéricos: Naturales y Enteros. Revisión de las operaciones y sus propiedades. Representación en la recta numérica

1) a) Falso. El conjunto de los números enteros no tiene primer elemento.

b) Falso. Contraejemplo: si $a = 5$, el opuesto de a es $-a = -5$ que no es un número natural.

c) Verdadero. Si $a < b$, por propiedad de orden en Z podemos sumar en ambos miembros de la desigualdad el mismo número sin que la relación de orden se modifique, en particular sumamos el opuesto de b: $a + (-b) < b + (-b)$, lo que implica que $a - b < 0$.

d) Falso. Contraejemplo: Si $a = 15$ y $b = -15$, se verifica que $|15| = |-15|$ pero $a \neq b$.

e) Falso. Contraejemplo: si $a = 0$, entonces $|a| = 0$.

f) Falso. Contraejemplo: Sean $a = 2$ y $b = 3$, entonces $a^b = 2^3 = 8$, $b^a = 3^2 = 9$ y $8 \neq 9$.

g) Verdadero, puesto que dos números opuestos están a igual distancia del 0 y por lo tanto tienen el mismo valor absoluto.

2) a) Par **b)** Par **c)** Par **d)** Par

3) a) $a \leq b$ **b)** $0 < x < 2$ **c)** $|a| = 3$ **d)** $|x - 8| \leq 5$ y $x \in \mathbb{Z}$

4) a) Siempre cierta. Si n es un número natural $n+(n+1)= 2n+1$ es un número impar, por lo tanto no es divisible por 2.

b) Siempre cierta. Si n es un número natural $n +(n+1)+(n+2)=3n+3=3(n+1)$ es divisible por 3

5) $8 \geq 8$. El signo $\geq$ implica $>$ o $=$. Es decir se puede dar el $>$ o el $=$. En este caso se cumple la igualdad.

$10 \geq 6$. En este caso se cumple el $>$·

6) a) $x < -3$ En Z: $\{\ldots,-5,-4\}$; **b)** $\underline{x > 0}$ En Z: $\{1,2,3,\ldots\}$;

c) $x \geq 6$. En Z: $\{6, 7, 8, \ldots\}$ **d)** $x \leq -12$ En Z: $\{\ldots,-14,-13,-12\}$;

e) $|x| \leq 4$ En Z: $\{-4,-3,-2,-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ **f)** $|x - 4| < 3$ En Z: $\{2, 3, 4, 5, 6\}$

1.2 Conjunto de números Racionales.

Revisión de las operaciones y sus propiedades

1) a) Una fracción es positiva cuando el numerador y denominador tienen el mismo signo, es decir $\frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \text{ y } b > 0) \text{ ó } (a < 0 \text{ y } b < 0)\cdot$

Es negativa cuando el numerador y el denominador tienen distinto signo, es decir

$\frac{a}{b} < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \text{ y } b < 0) \text{ ó } (a < 0 \text{ y } b > 0)\cdot$

Una fracción es cero cuando el numerador es 0, es decir $\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ y } b \neq 0\cdot$

b) Una fracción es <u>menor</u> que 1 cuando el numerador es menor que el denominador, es decir $\frac{a}{b} < 1 \Leftrightarrow a < b$; es mayor que 1 cuando el numerador es mayor que el denominador, es decir $\frac{a}{b} > 1 \Leftrightarrow a > b$. Una fracción es igual a 1 cuando el numerador y el denominador son iguales, es decir $\frac{a}{b} = 1 \Leftrightarrow a = b\cdot$

c) El número $\frac{8}{3}$ está entre 2 y 3.

2) La respuesta correcta es **c)**.

3) $\text{largo} = 35\text{cm}$ y $\text{ancho} = 15\text{cm}$

a) $\frac{L}{A} = \frac{35\text{cm}}{15\text{cm}} = \frac{7}{3}$ (cada 7 unidades del largo se tiene 3 del ancho)

b) $\frac{A}{L} = \frac{15\text{cm}}{35\text{cm}} = \frac{3}{7}$ (cada 3 unidades del ancho se tiene 7 del largo)

c) $\text{largo} = 37\text{cm}$ y $\text{ancho} = 17\text{cm}$ $\frac{L}{A} = \frac{37}{17}$; $\frac{A}{L} = \frac{17}{37}$

d) $\text{largo} = 70\text{cm}$ y $\text{ancho} = 30\text{cm}$ $\frac{L}{A} = \frac{70}{30} = \frac{7}{3}$; $\frac{A}{L} = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$

e) Al multiplicar por una constante el numerador y denominador de una fracción se mantiene la razón.

Al sumar una constante al numerador y denominador de una fracción no se mantiene la razón.

4) a) $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ **b)** $\frac{9}{16}$ **c)** $\frac{17}{81}$

5) $\frac{1}{24}$ y $\frac{1}{1440}$

6) Nuevos individuos $= 27600$. Nueva población $= \underline{147600}$.

7) Aumentó un 17%.

8) 237,5%

9) a) $\frac{1}{80}$; **b)** 15mm = 1,5cm

10) La capacidad del tanque es 1600cm^3.

11) El camino tiene 10 km de longitud.

12) El número es 2.

1.3 Conjuntos numéricos: Irracionales y Reales.

Revisión de las operaciones y sus propiedades

1) a) La expresión $\sqrt{a^2} = |a|$ es válida para todo número real a y $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ es válida para $a \geq 0$.

b) Sí, $\sqrt{-x}$ está bien definida para $x \leq 0$.

c) Conjunto solución: $\left\{-1, -\frac{1}{4}\right\}$

d) Conjunto solución: { 1 }.

e) i) El conjunto solución es R. ii) El conjunto solución es vacío.

f) Los posibles valores son 1 y –1.

2) a) Falso. La potencia no es distributiva respecto de la suma.

b) Falso. Sean $a = \frac{1}{2}, b = -2, c = 3$ entonces $\left(a^b\right)^c = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\right]^3 = 4^3 = 64$

mientras que $a^{b+c} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$

c) Falso, **a** no es menor que **b** equivale a decir **a** es mayor o igual a **b**.

d) Verdadero. Los puntos de la recta real que no representan números racionales son los correspondientes a los irracionales, como por ejemplo $\sqrt{2}$.

e) Falso. Sean a = –5 , b = 6 y c = –3, entonces ab + c = –5.6 + (–3) = – 30 – 3 = –33 mientras que ab + ac = –5.6 + (–5).(–3) = –30 + 15 = –15.

f) Verdadero. Los números irracionales son aquellos que tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Por lo tanto estos números no pueden ser racionales, puesto que no es posible escribirlos como fracción ya que los cocientes entre números enteros representan expresiones decimales finitas o periódicas.

g) Verdadero. Un número es real si es racional o irracional. Obviamente los números irracionales no son enteros y también existen números racionales que no son enteros (como por ejemplo $\frac{1}{2}$).

h) Verdadero. Todo número natural es racional, por lo tanto es número real.

i) Falso. Si un número es racional puede expresarse como cociente de números enteros, por lo tanto nunca podrá ser un número con infinitos decimales no periódicos.

j) Verdadero. Un número es real si es racional o irracional. Por lo tanto, todo número racional es un número real.

k) Falso. Contraejemplo: -10 es un número entero que no es natural.

3) a) En Z: $\{-3,-2,-1,0,1\}$. En R: $[-3, 2)$; **b)** $\varnothing$; **c)** En Z: {2}. En R: [2, 3)

d) En Z: Z. En R: R; **e)** En Z: $\{\ldots 5,6,7\}$. En R: $(-\infty, 7]$;

f) En Z: $\{\ldots,-3,-4,2\}$. En R: $(-\infty,-5)\cup\{2\}$

g) En Z: $\{\ldots,-2,-1\}\cup\{4,5,6,\ldots\}$. En R: $(-\infty,0)\cup[4,+\infty)$

4) a) En Z: $Z-\{0\}$. En R: $R-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$; **b)** $\varnothing$;

c) En Z: Z. En R: R

d) En Z: $\{-1,0,1,2,3\}$. En R: $(-2, 4)$;

e) En Z: $\{\ldots,-3,-2,\}\cup\{6,7,\ldots\}$. En R: $(-\infty,-2]\cup[6,+\infty)$; **f)** $\varnothing$; **g)** $\varnothing$

h) En Z: $\{\ldots,-4,-3,0,3,4,\ldots\}$. En R: $(-\infty,-2)\cup\{0\}\cup(2,+\infty)$

i) En Z: $\{\ldots,-3,-2,2,3,\ldots\}$. En R: $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

5) Por ejemplo: Entre 0 y 1/2: 0,1; 0,2; 0,25; 0,30; 0,40

Entre 10 y 10,1: 10,01; 10,03, 10,045; 10,08; 10,085

6) a) 5^{-20} **b)** 2^4 **c)** $m^{\frac{-25}{3}}$ **d)** a^4

7) a) V **b)** F **c)** V **d)** V

8) a) Restricciones: $x \neq \pm\frac{3}{2}$. Conjunto Solución: {0}

b) Restricciones: $x \neq \pm 2$. Conjunto Solución: $\varnothing$

c) Restricción: $x \neq 5$. Conjunto Solución: $\varnothing$

d) Restricción: $x \neq 5$. Conjunto Solución: {6}

e) Restricción: $x \neq \frac{3}{2}$ Conjunto Solución: $\left\{\frac{-1}{2},\frac{7}{2}\right\}$

f) Restricción: $x > -\frac{1}{2}$ Conjunto Solución: $\left\{-\frac{15}{32}\right\}$

g) Restricción: No tiene. Conjunto Solución: $\left\{-\frac{284}{625}\right\}$

h) Restricción: $x > 2$ Conjunto Solución: $\left\{\frac{9}{4}\right\}$

i) Restricción: $x \le \frac{1}{3}$ Conjunto Solución: $\left\{\frac{13}{48}\right\}$

9) a) Restricción: $x \ne \frac{4}{3}$. Conjunto Solución: $\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$

b) Restricción: $x \ne 1$. Conjunto Solución: $R - \{1\}$

c) Restricción: $x \ne \frac{-5}{2}$. Conjunto Solución: $\left(\frac{-5}{2},+\infty\right)$

d) Restricción: $x \ne 1$. Conjunto Solución: $(0,1) \cup (1,+\infty)$

e) Restricción: No tiene. Conjunto Solución: $\left(-\infty,\frac{-8}{3}\right] \cup [4,+\infty)$

f) Restricción: No tiene. Conjunto Solución: $(-2,1) \cup (3,6)$

g) Restricción: No tiene. Conjunto Solución: $(-2,2) \cup (2,6)$

h) Restricción: No tiene. Conjunto Solución: $(1,+\infty)$

i) Restricción: No tiene. Conjunto Solución: $\left(-\infty,\frac{59}{7}\right]$

j) Restricción: No tiene. Conjunto Solución: $\left[-\frac{82}{11},+\infty\right]$

k) Restricción: No tiene. Conjunto Solución: $\left[\frac{5}{3},3\right]$

10) a) $c = \frac{2}{P+N-1}$; **b)** $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$; **c)** $g = \frac{A_T - \pi(R^2 + r^2)}{\pi(R+r)}$

11 a) $3{,}84\text{x}10^{5}$; **b)** $1{,}5\text{x}10^{8}$; **c)** $4{,}308\text{x}10^{9}$; **d)** $2{,}2\text{x}10^{-9}$; **e)** $5\text{x}10^{-11}$; **f)** $1\text{x}10^{-10}$

12)a) 390,625 ; **b)** 44; **c)** aproximadamente $1{,}745\text{x}10^{17}$ virus de la gripe

13) a) Falsa. Correcta: $\log\sqrt{c} = \frac{1}{2}\log c$; **b) Falsa.** Correcta: $\log a - \log b = \log\frac{a}{b}$

14) a) Se transforma el 1 en $\log_3 3$ y se aplica propiedad de logaritmo de un producto.

b) Se transforma el 1 en $\log_2 2$ y se aplica propiedad de logaritmo de un cociente.

15) La respuesta correcta es **d)**

16) a) $x = 10\sqrt{10}$ **b)** $x = \frac{1}{5}$ **c)** $x = 2$ **d)** $x = \frac{5}{2}$ **e)** $x = -3$ **f)** $x = 17$ **g)** $x = 7$

h) $x = 3$ **i)** $x = -3$ **j)** $x = -7$ **k)** $x = 9$ **l)** $x_1 = 1, x_2 = 2$

1.4 Problemas

1) a) a 4320 metros; **b)** aproximadamente 97ºC

2) 1,8 años

3) a) 10^4 veces más intensa; **b)** 10 veces

4) $\frac{3}{4}$ hora o bien se puede decir que "comienza a rebasar después de 45 minutos".

5) a) $t = 3{,}05$ días; **b)** La campaña es efectiva ya que en dos semanas se presentó el 98,5% de la población a control; **c)** $\alpha = -0{,}086$.

6) a) $P_m = 1{,}5725\ P_c$; **b)** 57,25 %; **c)** \$ 893,18

Capítulo 3: Polinomios. Expresiones Algebraicas

3.1 Definición de polinomio. Operaciones

1) Dado el polinomio $p(x) = 5x^4 - 4x^2 + 3 - x$

a) Grado = 4

b) Coeficiente principal = 5 Término constante = 3

c) El polinomio no está ordenado ni completo. $p(x) = 3 - x - 4x^2 + 0x^3 + 5x^4$

d) $p(5) = 5 \cdot 5^4 - 4 \cdot 5^2 + 3 - 5 = 3023$ $p(-3) = 5 \cdot (-3)^4 - 4 \cdot (-3)^2 + 3 - (-3) = 375$

Se llaman Valores Numéricos

e) $p(2t) = 5 \cdot (2t)^4 - 4 \cdot (2t)^2 + 3 - 2t = 80t^4 - 10t^2 + 3 - 2t$ Se llama Especialización

f) $a = 5$, $b = 0$, $c = -4$, $d = -1$, $e = 3$

2) Un polinomio podría ser: $r(x) = \sqrt{3}x^3 - \pi x^2 + \sqrt{2}x + e$

3) Un polinomio podría ser**:** $k(x) = x^4 - 6x + 9$

4) a) $p(x) + q(x) = -2x^3 + 8x^2 + 2x - 10$

b) $p(x) \cdot q(x) - r(x) = (-8x^4 + 28x^3 + 8x^2 - 52x - 24) - (x^2 - x - 2) =$

$= -8x^4 + 28x^3 + 7x^2 - 51x - 22$

c) $r(x) - p(x) \cdot q(x) = (x^2 - x - 2) - (-8x^4 + 28x^3 + 8x^2 - 52x - 24) =$

$= 8x^4 - 28x^3 - 7x^2 + 51x + 22$

d) Cociente de la división: $-\frac{1}{2}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{13}{8}$ Resto de la división: $-\frac{35}{4}$

e) $p(x)/r(x)+q(x)=(-2x+6)+(2+4x)=2x+8$

5) a) m **b)** m **c)** m + n + 2 **d)** m – n **e)** 3m – 2n **f)** 2m + n – 2

6) Área Pentágono = $[5\cdot 6{,}92\cdot 6]/2=103{,}8$

Área círculo = $\pi\cdot r^2$

Polinomio área sombreada: $p(r)=103{,}8-\pi\cdot r^2$

7) Sea x la medida de la arista del cubo.

a) $c(x)=12x^3+6\cdot 2{,}5x^2+12\cdot 1.5x+4=12x^3+15x^2+18x+4$

b) Si el costo aumenta el 40%:

Metro cuadrado de pintura = 2,5 + 0,4·2.5 = 3,5

Metro lineal de pulido = 1,5 + 0,4·1,5 = 2,1

Nuevos costos $c(x)=12x^3+21x^2+25{,}2x+4$

c) t = Longitud de la nueva arista = 1,4x

$c(1{,}4x)=12(1{,}4x)^3+6\cdot 2{,}5(1{,}4x)^2+12\cdot 1{,}5\cdot(1{,}4)+4=32{,}928x^3+29{,}4x^2+25{,}2x+4$

3.2 Factorización de polinomios. Ruffini

1) a(x) = x – 1 b(x) = x^2 – 1 c(x) = $2x^3 + 4x^2 - 6x$

2) a) Raíces: –2 y 3 . Ambas de multiplicidad 1

Factorización: $p(x)=2\cdot(x+2)\cdot(x-3)\cdot(x^2+1)$

b) Raíces: 0 (multiplicidad 1), 3 (multiplicidad 2)

Factorización: $r(x)=3x^3-18x^2+27x=3x\cdot(x^2-6x+9)=3x\cdot(x-3)^2$

3) a) La respuesta es sí, pues extrayendo factor común obtenemos:

$p(x)=x^3.(x-2)^3+x^4.(x-2)=(x-2)\cdot[x^3\cdot(x-2)^2+x^4]$

b) Factorización: $p(x)=x^3\cdot(x-2)\cdot[\cdot(x-2)^2+x]=x^3\cdot(x-2)\cdot(x^2-3x+4)$

c) Raíces: 0 (multiplicidad 3) 2 (multiplicidad 1)

4) $p(-2)=(-2)^3-4\cdot(-2)^2+6+m\cdot(-2)=0\Rightarrow m=-9$

5) a) Falso. Tiene 2 raíces reales (0 y 1) y dos complejas conjugadas.

b) Falso. Se puede factorizar en R pues sus raíz (doble) es el $-\sqrt{3}$. (Observar que se trata de un trinomio cuadrado perfecto: $q(x)=x^2+2\sqrt{3}x+3=(x+\sqrt{3})^2$)

c) Verdadero. Puede observarse, mediante el teorema del resto, que $r(x)/p(x)$ es una división exacta. A saber: $r(-1) = -4\cdot(-1)^3 - 2\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1) + 2 = 0$

d) Falso. $\frac{1}{4}$ no es raíz de $q(x) = 8x^3 - 6x^2 + 5x - 3$ ya que puede observarse a través del teorema del resto que $q(x)/\left(x - \frac{1}{4}\right)$ no es una división exacta, a saber:

$$q\left(\frac{1}{4}\right) = 8\left(\frac{1}{4}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{4}\right) - 3 = \frac{27}{8}$$

e) Verdadero. La factorización de *h(x)* está dada por: $h(x) = (x-2)^3.(x+1)$, lo cual implica que 2 es una raíz triple.

f) Verdadero. Nuevamente esto puede justificarse mediante el empleo del teorema del resto: $(-2)^6 - 64 = 0$

6) $a = 16$, $b = 0$.

7) $g(t) = -t^4 + 3t^3 - t^2 + 7t - 1$ $\qquad$ $h(t) = = t^4 - 3t^3 + 0{,}5\, t^2 + 3t - 2$

8) $p(x) = x^2 - 2x + 3$

9) No existe valor de m.

10) a) $P(2) = 0$ (Por el teorema del resto)

b) No se encuentra completamente factorizado porque el factor $y^2 - 4$ es una diferencia de cuadrados: $y^2 - 4 = (y-2).(y+2)$

Grado de $r(y) = 6$, Coeficiente principal= -1

c) $h = 4$

11) $S(n) = -2.(x-3)^2.(x+1).(x-6)$

12) No es posible hallar el valor de m y n.

13) $p(x) = x^5 - 3x^4 + 9x^3 - 15x^2 + 17x - 8$

14) El número buscado es 245.

3.3 Expresiones algebraicas fraccionarias

1)a) $\dfrac{x^2 + 9 - 6x}{x^2 - 9} = \dfrac{x-3}{x+3}$; $x \neq 3$, $x \neq -3$ $\qquad$ **b)** $\dfrac{12x^2 - 3}{x^2 + \frac{1}{2}x} = \dfrac{6(2x-1)}{x}$; $x \neq 0$, $x \neq -1/2$

c) $\dfrac{-x^2 - 14x - 49}{2x^2 + 12x - 14} = \dfrac{x+7}{2(x-1)}$ $\qquad$; $x \neq 1$, $x \neq -7$

d) $\dfrac{x^2-x+6}{2x^2-8} = \dfrac{x^2-x+6}{2(x-2)(x+2)}$; $x \neq 2$, $x \neq -2$

2) a) $\dfrac{x-2}{4}+\dfrac{3x+2}{6} = \dfrac{9x-2}{12}$, sin restricciones **b)** $\dfrac{2}{5a^2}+\dfrac{1}{3ab} = \dfrac{6b+5a}{15a^2b}$; $a \neq 0$, $b \neq 0$

c) $\dfrac{2a-3}{3a}+\dfrac{3x+2}{10x}+\dfrac{x-a}{5ax} = \dfrac{29a-24}{3a}$; $a \neq 0$, $x \neq 0$

d) $\dfrac{m+3}{m-3}+\dfrac{m+2}{m-2} = \dfrac{2(m-\sqrt{6})(m+\sqrt{6})}{(m-3)(m-2)}$; $m \neq 3$, $m \neq 2$

e) $\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{(x-4)(x-3)}$; $x \neq 4$, $x \neq 3$

f) $\dfrac{m-n}{m+n}-\dfrac{m+n}{m-n} = \dfrac{-4mn}{(m+n)(m-n)}$; $m \neq \pm n$

g) $\dfrac{2a+3}{4a}-\dfrac{a-2}{8a} = \dfrac{3a+8}{8a}$; $a \neq 0$ **h)** $\dfrac{5x+25}{14}\cdot\dfrac{7x+7}{10x+50} = \dfrac{x+1}{4}$; $x \neq -5$

i) $\dfrac{m+n}{mn-n^2}\cdot\dfrac{n^2}{m^2-n^2} = \dfrac{n}{(m-n)^2}$; $m \neq \pm n$, $n \neq 0$

j) $\dfrac{1-x}{a+1}\cdot\dfrac{a^2+a}{x-x^2}\cdot\dfrac{x^2}{a} = x$; $a \neq 0$, $a \neq -1$, $x \neq 0$, $x \neq 1$ **k)** $\dfrac{x-1}{3}:\dfrac{2x-2}{6} = 1$, $x \neq 1$

l) $\dfrac{x^3-x}{2x^2+6x}:\dfrac{5x^2-5x}{2x+6} = \dfrac{x+1}{5x}$; $x \neq 0$, $x \neq -3$, $x \neq 1$

m) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{x}{x+1}$; $x \neq 0$, $x \neq -1$ **n)** $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}} = x+1$; $x \neq 0$, $x \neq -1$

o) $\dfrac{\dfrac{x^2-4}{x^4-16}}{\dfrac{x^2+4x+4}{(x+2)}} = \dfrac{1}{(x^2+4)(x+2)}$; $x \neq 2$, $x \neq -2$

3) a) Falso. Porque el denominador no es un polinomio (la variable está elevada a un exponente fraccionario)

b) Falso. El dominio es R – {–3, 3}

c) Verdadero. Porque la expresión es un cociente de polinomios.

Capítulo 4: Función y Función de primer grado

4.1 Función

1) a) No es función pues a los valores de x comprendidos entre -2 y 4 les corresponden varias imágenes.

b) No es función ya que a los valores de x mayores a 4 no les corresponde ninguna imagen.

c) No es función ya que a x igual a 3 le corresponden varias imágenes y a todo x distinto de 3 no le corresponde ninguna imagen.

d) Es función. Todos los elementos del dominio tienen una y solo una imagen.

e) Es función. Todos los elementos del dominio tienen una y solo una imagen. En este caso, todos los valores de x tienen la misma imagen $y = 2$.

f) No es función pues los valores de x pertenecientes al intervalo (0, 4] tienen dos imágenes y todos los números reales menores que cero no tienen ninguna imagen.

2) a) $D = R$; **b)** $D = R - \{-3\}$; **c)** $D = \{x \,/\, x \in R \wedge x \geq -3\} = [-3, \infty)$

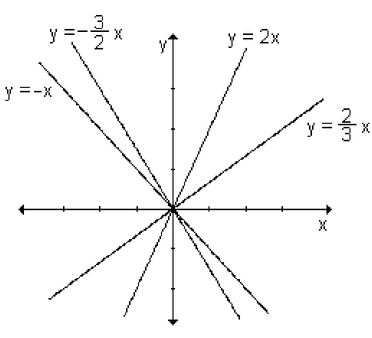
d) $D = \{x \,/\, x \in R \wedge x > 2\} = (2, \infty)$

3) a) La imagen de $x = 1$ es 1, es decir $f(1) = 1$; $f(3) = 17$; $f(-2) = 7$; $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{9}$

b) Los puntos $\left(\sqrt{2}, 3\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ pertenecen a la gráfica de la función, mientras que los puntos $(-1, -3)$ y $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, no.

4.2 Función polinómica de primer grado o función lineal

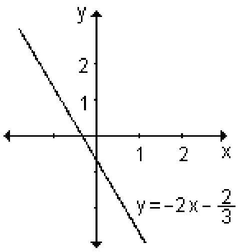
1) a)



b) Todas las gráficas pasan por el origen de coordenadas (0, 0). Considerando la expresión $y = mx$, las gráficas obtenidas se diferencian en la pendiente **m**.

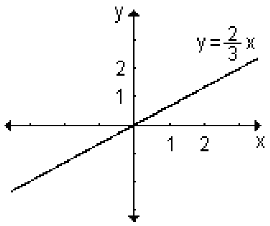
2) a) $6x + 3y + 2 = 0$ es una función lineal no homogénea o función afín.

Expresión equivalente: $y = -2x - \frac{2}{3}$. Pendiente $m = -2$; ordenada al origen $h = -\frac{2}{3}$



b) $2x - 3y = 0$ es una función lineal o función homogénea.

Expresión equivalente: $y = \frac{2}{3}x$. Pendiente $m = \frac{2}{3}$; ordenada al origen $h = 0$



c) $2x^2 - 3y = 1$ no es una función de primer grado.

d) $x.y - 4 = 0$ no es una función de primer grado.

3)a) $6x + 3y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2x - \frac{2}{3}$

Si $x = \frac{2}{3} \Rightarrow y = -2$. Se obtiene el punto $\left(\frac{2}{3}, -2\right)$

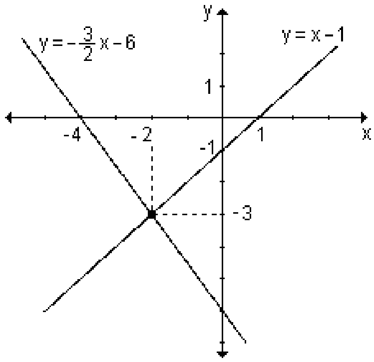
Si $x = -3 \Rightarrow y = \frac{16}{3}$. Resulta el punto $\left(-3, \frac{16}{3}\right)$

b) La abscisa del punto para el cual $y = -\frac{4}{3}$ es $x = \frac{1}{3}$

4) a) $k = 6$; **b)** $k = 2$; **c)** $k = 3$

5) a) $y = x - 1$; $y = -\frac{3}{2}x - 6$

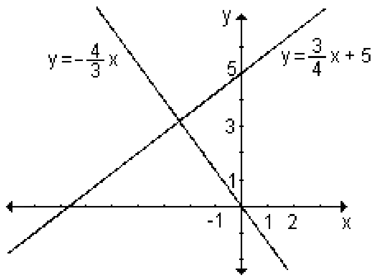
b)



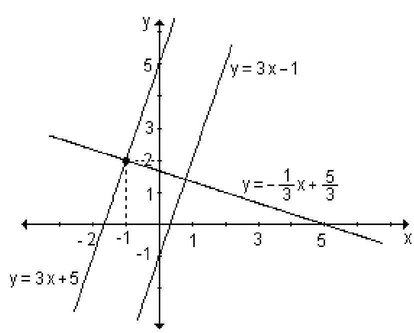
c) Resolviendo el sistema formado por ambas rectas, el sistema resulta compatible determinado, siendo su solución el punto $(-2, -3)$.

6) a) paralelas; **b)** secantes; **c)** perpendiculares.

7) $k = \frac{1}{2}$



8) Recta paralela $y = 3x + 5$; recta perpendicular $y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$



9) a) V, tienen la misma pendiente; **b)** F, no se verifica que el producto de sus pendientes es -1; **c)** F, las rectas son paralelas; **d)** F, el punto no pertenece a la recta que pasa por los puntos dados pues no verifica la ecuación de la misma.

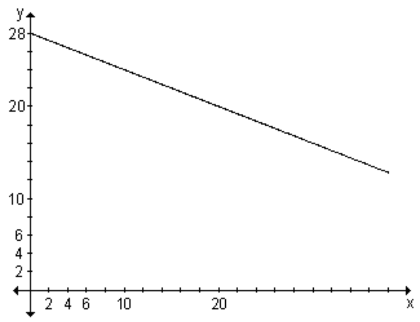
10)a) $y = f(x) = -\frac{2}{5}x + 28$, donde y representa el precio por unidad y x las unidades de demanda.

b) $D = \{x/x \in N \wedge x \in \dot{5} \wedge x < 70\}$

c) Si se demandan 30 unidades el precio será de $16. Se obtiene al reemplazar en al función a x por 30, es decir: $f(30) = -\frac{2}{5}.30 + 28 = 16 \cdot$

d) Si el precio por unidad es de $24, se demandarán 10 unidades. Se obtiene al reemplazar en al función dada a "y" por 24.

e)



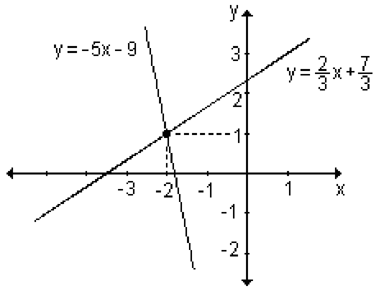
Observación: Resulta claro que, tanto la función de oferta como la función de demanda no deberían graficarse mediante un trazo continuo ya que la cantidad de productos son números enteros. Sin embargo, sólo con fines prácticos, para poder realizar un mejor análisis de dichas funciones, es conveniente hacerlo teniendo presente esta situación al momento de elaborar las conclusiones. Esta tarea de graficar con trazo continuo funciones que no lo son, es una práctica común en muchas aplicaciones.

11) a) En la empresa 1, el costo es $y = 5x$. Para la otra empresa, el costo es $y = 150 + 2x$

b) Igualando las ecuaciones se obtiene $x = 50$, es decir que recorriendo 50 km el costo es el mismo en ambas empresas.

12) a) La única solución del sistema es (–2, 1)

b)



c) $y = -\frac{1}{2}x$

13) a) El sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 2x + 5y = 8 \end{cases}$

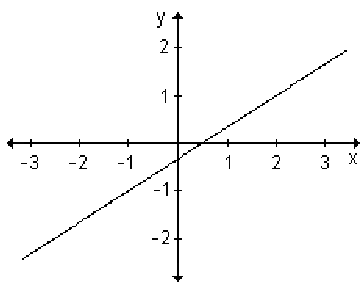
b) Resolviendo el sistema, la única solución es (–1, 2)

14) a) El sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x - 2y = -2 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$

b) El sistema no tiene solución.

15) a) El sistema tiene infinitas soluciones.

b) Gráficamente se observa que las dos rectas son coincidentes.



16) $k = 2$; $p = -1$

17) a) $k = -\frac{3}{5}$; **b)** Punto de intersección (0, –5)

18) a) $p = -\frac{7}{2}$; **b)** Punto de intersección $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$

19) a) Designando con **x** a la cantidad de artículos (patinetas), con **y** al costo diario total, se obtiene la expresión $y = 8x + 200$

b) Designando con **x** a la cantidad de patinetas que se vendan, con **y** al ingreso diario total, resulta $y = 16x$

c) Para encontrar el punto de equilibrio, se debe resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 8x - y = -200 \\ 16x - y = 0 \end{cases}$$

El punto de equilibrio es (25, 400), es decir, deberán producirse y venderse 25 patinetas para que el costo coincida con el ingreso.

20) En la empresa hay 50 hombres y 110 mujeres.

21) El dinero que ha invertido es $15000 al 4% y $10000 al 5%.

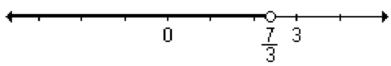
22) La fracción es $\frac{2}{3}$

23) El alumno respondió 22 preguntas correctamente.

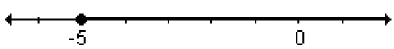
24) a = b = 2; la función resultante es f(x) = 2x + 2

25) Se usará por 30,7 años aproximadamente.

26) a) Solución $\left(-\infty, \frac{7}{3}\right)$



b) [–5, +∞)



27) a) No tiene solución S = ∅

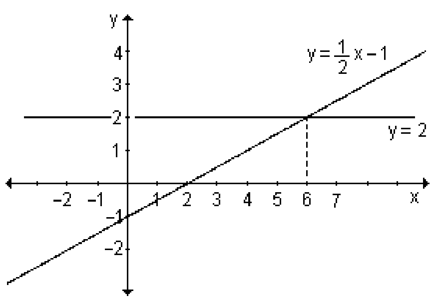
b) Solución (–3, 3]

28) a) y = 0 para x = 2

b) y > 0 para x > 2 ⇒ Solución (2, +∞)

c) y < 0 para x < 2 ⇒ Solución (–∞, 2)

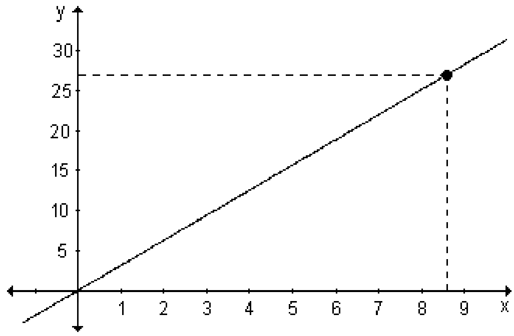
d) y ≤ 2 para x ≤ 6 ⇒ Solución (–∞, 6]



29) a) y = 22x + 20 **b)** R_0^+ **c)** $284 **d)** 20 m^2.

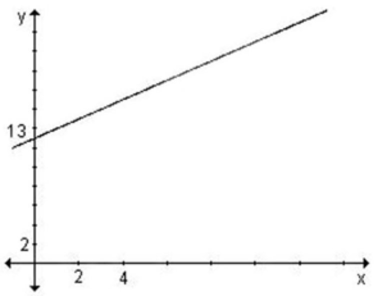
30) a) El diámetro debe ser de aproximadamente 8,60km.

b)



31) La base mide 10 cm y la altura 12 cm.

32) $y = x + 13$



33) Cada libro cuesta \$25 y cada lapicera \$18.

34) a) $p_v = 1{,}5725\ p_c$ **b)** 57,25 % **c)** \$893,18

Capítulo 5: Función Cuadrática

5.3. Actividades y Problemas

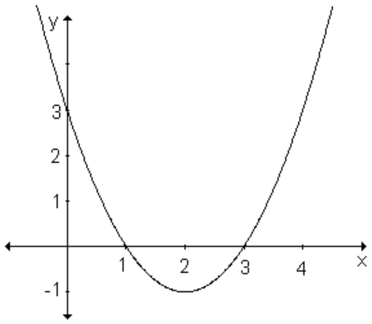
1) a) $f(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 0)$ ó $x \in (2, +\infty)$; $g(x) > 0$ si $x \in (-2, 2)$.

b) $(-1, 3)$ y $(2, 0)$. **c)** $x \in (-\infty, -1)$ ó $x \in (2, +\infty)$. **d)** $x \in (-\infty, -1]$ ó $x \in [2, +\infty)$.

2) a) Pendiente: $m = 0{,}5$ y ordenada al origen es $y = -1$; por lo tanto la ecuación de la recta es $f(x)$: $y = 0{,}5x - 1$. Vértice de la parábola: $(2, 1)$ y el valor del parámetro $a = -0{,}25$; por lo tanto la ecuación de $g(x)$: $y = -0.25\,(x - 2)^2 + 1$.

b) $x \in (4, +\infty)$. **c)** $x \in (-\infty, 0)$ ó $x \in (4, +\infty)$.

3) a)



b) i) f(x) >0 si x $\in$ (–∞, 1) ó x $\in$ (3, +∞).

ii) f(x) < 0 si x $\in$ (1, 3).

iii) f(x) es creciente si x $\in$ (2, +∞).

iv) f(x) es decreciente si x $\in$ (–∞, 2).

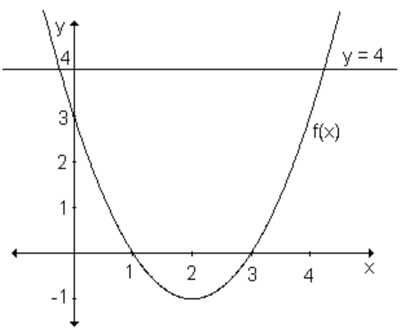
c) i) f(x) corta al eje de las abscisas en (1, 0) y en (3, 0). Al eje de las ordenadas en (0, 3).

ii) f(x) alcanza su valor mínimo en el vértice: (2, –1).

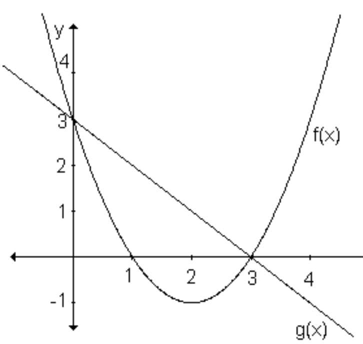
d) i) f(x) = 0 si x = 1 ó si x = 3.

ii) f(x) = 4 si x = $2-\sqrt{5}$ ó x = $2+\sqrt{5}$

Gráficamente:



e)

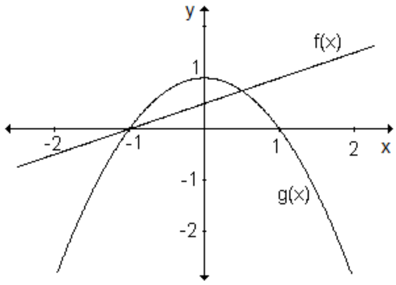


i) $g(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 3)$.

ii) $f(x) = g(x)$ en (0, 3) y en (3, 0).

iii) $f(x) > g(x)$ si $x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$.

4) a)



b) i) $g(x) > 0$ si $x \in (-1, 1)$$f(x) > 0$ si $x \in (-1, +\infty)$.

ii) $g(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -1)$ ó $x \in (1, +\infty)$ $f(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -1)$.

iii) $g(x)$ es creciente si $x \in (-\infty, 0)$

$f(x)$ es creciente en todo su dominio (la pendiente de la recta es positiva).

iv) $g(x)$ es decreciente si $x \in (0, +\infty)$. $f(x)$ no es decreciente.

c) i) $g(x)$ corta a los ejes coordenados: (–1, 0); (0, 1) y (1, 0).

$f(x)$ corta a los ejes coordenados: (–1, 0) y (0; 0,5).

ii) $g(x)$ alcanza su valor máximo (porque $a > 0$) en (0, 1).

d) i) $f(x) = g(x)$ en (–1, 0) y en (0,50; 0,75).

ii) $f(x) < g(x)$ si $x \in (-1; 0,50)$

iii) $f(x) \leq g(x)$ si $x \in [-1; 0,50]$

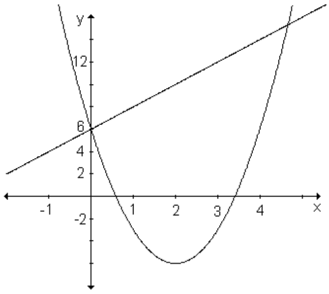
5) Se sabe que si x_1 y x_2 son las raíces de una ecuación de segundo grado entonces $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ y que $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$. Por lo tanto, de la última igualdad podemos deducir que x_1 y x_2 deben tener el mismo signo, es decir ambas positivas o ambas negativas.

Analizando la primera igualdad: $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, si ambas raíces son positivas (la suma es positiva) b ó a deben ser negativos, lo que contradice el dato dado, por lo tanto es absurdo: no pueden ser positivas las dos raíces.

Analizando la otra posibilidad: que ambas raíces sean negativas (la suma es negativa) por lo tanto b y a deben tener el mismo signo, pueden ser positivos; es decir no contradice los datos dados. Por lo tanto ambas raíces pueden ser negativas pero no positivas.

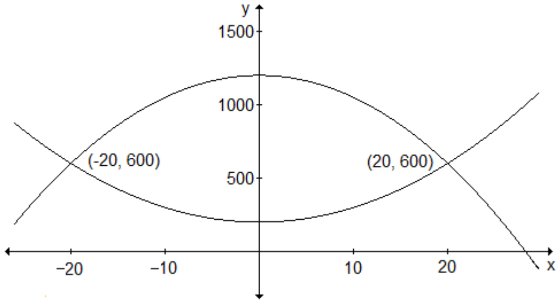
6) a) Solución del Sistema: (0, 6) y $\left(\frac{14}{3},\frac{46}{3}\right)$. El sistema tiene dos soluciones.

Gráficamente:

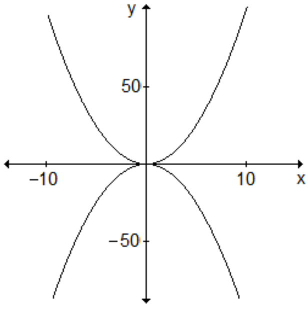


b) Soluciones del sistema: (–20, 600) y (20,600). El sistema tiene dos soluciones.

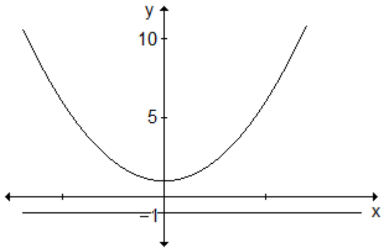
Gráficamente:



c) La solución del sistema es (0,0). Una sola solución. Gráficamente:



d) Ninguna solución. Gráficamente.



7) La cantidad de productos que se deben vender para obtener el ingreso máximo es de 1500 unidades. El ingreso máximo es de \$2.250.000.

8) Hay que calcular las ordenadas del vértice: (0,5; 44), que interpretando lo obtenido se puede afirmar que a los 0,5 segundos de haber sido lanzado el objeto alcanzó una altura máxima de 44 metros.

9) a) $I = p(q).q = -0{,}25\ q^2 + 200\ q$ **b)** Dominio = [0,800].

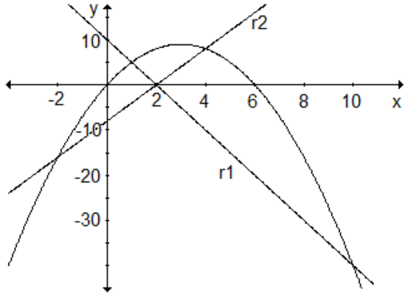
c) Abscisa del Vértice: Cantidad que se debe vender para obtener el ingreso máximo: q = 400. Ordenada del Vértice: Ingreso Máximo que se obtiene al vender 400 unidades: I = 40.000. Precio al cual se venden 400 unidades: p = 100.

10) a) r1: $y = -5x + 10$; r2: $y = 4x - 8$

b) Puntos de intersección: (1, 5) y (10, –40)

c) Coinciden en (4, 8) y en (–2, –16)

d)



11) a) $f(x) = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$ **b)** $f(x) = -(x + 3)^2$ **c)** $f(x) = 2(x + 3)^2 + 5$

12) k = 1. La otra raíz es –2

13) k = 3

14) a) $S = (-\infty, -5] \cup [3, \infty)$ **b)** $S = \emptyset$

Capítulo 6: Resolución de triángulos rectángulos

6.1 Ángulos.

1) a) sen 1º < sen 1; **b)** cos 1º > cos 1;

2) $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{2\pi}{3}$; **3)** $\frac{13}{45}\pi$; **4)** 102°; **5)** 0,75 rad;

6) 15,9 cm; **7)** radio = 14,3 cm; **8)** P = 44,1 cm, S = 106 cm^2.

9) a) $\frac{2\pi}{3}$, **b)** $\frac{5\pi}{9}$, **c)** $\frac{8\pi}{9}$ **d)** $\frac{40\pi}{9}$

6.2 Algunas identidades trigonométricas y relación entre las razones trigonométricas

2) $\cos 15º = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$; $\mathrm{tg} 15º = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

5) La altura del triángulo es aproximadamente de 4,96 cm y el área es aproximadamente igual a 9,90 cm^2.

6) a) $P = 2\sqrt{2+\sqrt{3}} + 1$, $A = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$; **c)** $P = 3l$, $A = \frac{\sqrt{3}}{12} l^2$

7) a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, **b)** $A = \frac{n}{4\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)} l^2$

6.3 Problemas que involucran resolución de triángulos rectángulos

1) La altura de la torre es aprox. 43,30 metros y la distancia a la que se encontraba el observador es 75 metros.

2) La altura de la antena es aprox. 19,70 metros.

3) El área del terreno triangular es aproximadamente 223,8 m^2.

4) La altura del árbol es aproximadamente 13,77 m y la altura de la ventana de aprox. 5,46 m.

5) Altura ≅ 2813,43 m

6) Hipotenusa ≅ 10,98 cm