Universidad Nacional del Litoral
Secretaría Académica
Dirección de Articulación, Ingreso y Permanencia
Año 2015

Matemática
para el ingreso

ISBN en trámite

Unidad 0. Conjuntos

Elena Fernández de Carrera / Gloria Elida Moretto / Lina Mónica Oviedo
Nélida Mamut de Bergesio / Liliana E. Contini / Stella M. Vaira / Liliana Taborda

En la vida diaria estamos acostumbrados a hablar de conjuntos: el conjunto de jugadores de primera división, el conjunto de los puntos de una circunferencia. Nos referiremos a ellos como una colección o agrupaciones de objetos.

Denotaremos los conjuntos con letras mayúsculas y los elementos con letras minúsculas.

a) ¿Cómo podemos escribir simbólicamente que un elemento n pertenece a un conjunto A?

b) ¿Cómo se lee $m \notin A$?

(1)

A veces trabajaremos con varios conjuntos cuyos elementos pertenecen todos a un conjunto más grandes al que llamaremos **conjunto referencial** o **universal** y simbolizamos **U**.

Así si estamos hablando del conjunto de los Beatles, nuestro conjunto universal puede ser el de los grupos musicales de los últimos treinta años.

Si estudiamos figuras geométricas planas, nuestro conjunto universal puede ser el de todos los puntos del plano.

Decimos que un conjunto está bien determinado, si podemos decidir sin ambigüedades si un elemento pertenece o no a él.

Una manera de hacerlo consiste en nombrar cada uno de los elementos que pertenecen a él y decimos que el conjunto está determinado por **extensión**.

Otra manera es nombrar una propiedad común a los elementos, que sólo ellos la tengan. En este caso decimos que el conjunto está determinado por **comprensión.**

Tomemos como un desafío indicar cuál de estos conjuntos está determinado por extensión y cuál por comprensión:

A = { a,e,i,o,u,}

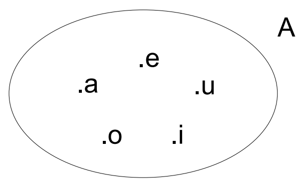
B = { x : x es integrante de la delegación argentina en los juegos olímpicos de 1998}

Proponer dos conjuntos, uno determinado por extensión y otro por comprensión.

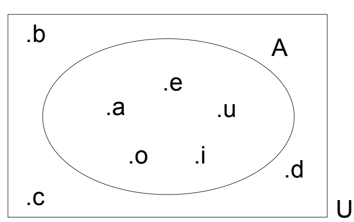
....

(2)

Gráficamente podemos representar a los conjuntos por medio de los diagramas de Venn que consisten en dibujar una línea simple cerrada dentro de la cual imaginamos los elementos del conjunto a los que representamos por puntos. Así por ejemplo:



Si el **conjunto universal** es el de las letras a, e, i, o, u, b. c. d, representamos:



Consideremos ahora los conjuntos

F = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }   y   H = {3, 4, 5 }

Como vemos, todos los elementos de H son también elementos de F.

Lo denotaremos H $\subset$ F y se lee “H contenido en F”. También se dice que H es subconjunto de F.

Ahora podemos hacer una comprobación:

Siendo $L = \{a, b, c, d, f, g\}$; $A = \{a, c\}$ *y* $B = \{f, g, h\}$

¿A es subconjunto de L?
¿L es subconjunto de A?
¿B es subconjunto de L?
¿L es subconjunto de B?
¿B es subconjunto de B?

(3)

¿Cuándo se dice que dos subconjuntos son iguales?

Cuando tienen los mismos elementos

¿Son iguales los conjuntos $R = \{a, e, i, o\}$ *y* $T = \{a, e, i, o, a\}$

(4)

Operaciones con conjuntos

Con los conjuntos podemos realizar operaciones.
Para comenzar veamos un ejemplo:

Al escribir la palabra "casa" necesitamos el conjunto de letras
$A = \{c, a, s\}$

Al escribir la palabra "grande" necesitamos el conjunto
$B = \{g, r, a, n, d, e\}$

Para escribir "casa grande" necesitamos el conjunto
$C = \{c, a, s, g, r, n, d, e\}$

Este nuevo conjunto se obtiene juntando los elementos de ambos y lo llamamos **conjunto unión.**

Podemos formalizar dando la siguiente definición:
Dados los conjuntos A y B, llamamos unión de A y B al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o a B.

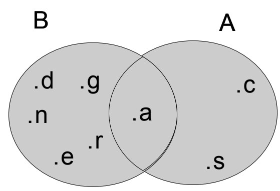
Simbólicamente definimos al conjunto **A** $\cup$ **B** así

$\mathbf{A \cup B = \{ x / x \in A \ v \ x \in B \}}$

¿Cómo se lee?

(5)

Si nos referimos al ejemplo anterior, la representación gráfica de A $\cup$ B es la zona sombreada.



Realizando las siguientes actividades es posible detectar si se tienen claros los conceptos hasta aquí trabajados:

a. Representar gráficamente el conjunto unión de:

P = {1, 2, 4, 8, 5, 6, } y

R = { 1, 3, 5, 7, 9 }

(6)

b. Determinar el conjunto P$\cup$R por extensión

(7)

c. Hallar F $\cup$G siendo

G = { a, b, c, d, e } y

F = { b, c, d }

Hacer su representación gráfica

(8)

De este último ejercicio es posible sacar conclusiones:

¿Cómo están relacionados entre sí F y G?

¿A cuál de los dos conjuntos dados es igual F $\cup$G?

(9)

A partir de las respuestas a los dos últimos interrogantes, es posible generalizar los resultados obtenidos:

Si $A \subset B$ entonces $A \cup B = B$

La segunda operación entre conjuntos que vamos a trabajar es la **intersección**

Dados dos conjuntos R y S, llamamos intersección de R y S al conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a R y a S.

Escribimos $R \cap S$

Vamos ahora a definir simbólicamente el conjunto intersección así:

$R \cap S = \{ x: x \in R \wedge x \in S\}$

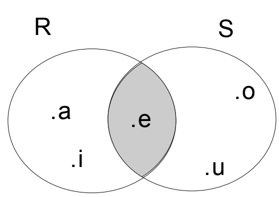
¿Cómo se lee?

(10)

Así por ejemplo, dados los conjuntos

$R = \{a, e, i\}$, $S = \{o, u, e\}$, $R \cap S = \{e, i\}$

Gráficamente es:



Proponer dos conjuntos C y D para que la intersección sea el conjunto $\{-1, 0, 1\}$

(11)

¿Qué pasa si los conjuntos a intersectar no tienen elementos comunes?

Sabemos que esto puede ocurrir.

Decimos entonces que los conjuntos son disjuntos.

Así por ejemplo:
Los conjuntos A = { 2, 3 } y B = {1, 5, 6 } son disjuntos.

Proponer dos pares de conjuntos disjuntos

(12)

Pensemos ahora en dos conjuntos disjuntos y en el conjunto obtenido de la intersección de ambos

El conjunto que vamos a obtener carece de elementos y se llama **conjunto vacío.**

Generalmente se lo representa con el símbolo $\varnothing$ o bien { }.

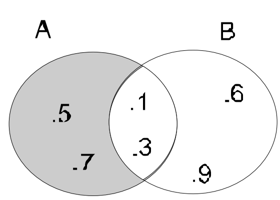
Otra operación entre conjuntos es la **diferencia.**

Dados dos conjuntos A y B, llamamos diferencia entre A y B al conjunto formado por todos los elementos de A que no están en B.

Para indicar la diferencia escribimos **A – B**

Así si tenemos los conjuntos A = {1, 3, 5, 7 } y B= { 1, 3, 6, 9 }
entonces A – B = { 5, 7)

En el gráfico la zona sombreada representa A – B.



¿Qué elementos tiene el conjunto B – A?

(13)

Conclusión: A – B ... B – A

(14)

Simbólicamente podemos definir al conjunto A –B como sigue:

A – B = { x : x $\in$ A y x $\notin$ B }

¿Cómo se lee?

(15)

Si ahora tomamos un conjunto U y un conjunto A tal que A $\subset$ U.
Al conjunto U - A lo llamamos complemento de A con respecto a U y lo denotamos A^c

Por ejemplo si:

U= { x : x es letra de la palabra manzana} y A = {a}, entonces A^c = { m, n, z }.

Proponer un conjunto universal U y un conjunto B tal que B $\subset$ U.

Calcular B^c
¿ A qué conjunto es igual B $\cap$ B^c ?
¿ A qué conjunto es igual B $\cup$ B^c ?

(16)

¿Las respuestas a las dos últimas preguntas son válidas para cualquier B $\subset$U?

(17)

¿Qué fue hasta aquí lo esencial?

Si **a** es un elemento de **S** diremos que **a** *pertenece a* **S** y lo indicaremos **a** $\in$ **S.**

Un conjunto se puede determinar de dos formas:
• por **extensión:** haciendo una lista de todos los elementos sin repetir ninguno y separándolos con comas;
• por **comprensión:** nombrando una propiedad común a todos los elementos del conjunto y sólo a ellos.

Un conjunto **vacío** es el que no tiene ningún elemento.
Dos conjuntos son **iguales** si tienen los mismos elementos.

Un conjunto H es **subconjunto** de F si todos los elementos de H son elementos de F. Indicaremos $H \subset F$.

El símbolo $\subset$ Relaciona dos conjuntos, mientras que el símbolo $\in$ relaciona un elemento con un conjunto.

Unión de dos conjuntos C y S es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a C, a S o a ambos. Indicaremos $C \cup S$.

Intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen simultáneamente a A y a B. Indicaremos $A \cap B$.

Se dice que dos conjuntos M y N son **disjuntos** si no tienen elementos en común. Su intersección es el **conjunto vacío** $M \cap N = \varnothing$.

Diferencia de dos conjuntos R y S es el conjunto de elementos que pertenecen a R pero no pertenecen a S. Indicaremos **R – S.**

Dado un conjunto A subconjunto del universal U, llamamos **complemento** de A al conjunto U - A·

Ejercicios

1. Dados los siguientes conjuntos:

A = {x:x es un número natural mayor que 2 y menor que 11}

B = {2, 4, 6, 8}

C = { x:x es una cifra del número 56.789}

U = { x:x es un número natural menor que 15}

a) Definir por extensión los conjuntos A y C

b) Definir por extensión y comprensión y representar por diagramas de Venn los siguientes conjuntos:

$B \cap C$, $(A \cup B) \cap C$, $B - C$, $U - (A \cup B)$, C^c, $(B \cap C)^c$, $(B \cup C) - A$

2. Representar mediante diagramas de Venn dos conjuntos tales que el resultado de la intersección sea uno de ellos ¿Cuál es el resultado de la unión?

3. Si dicen que $A - B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$ ¿Cómo son A y B? ¿Cómo se representan en un diagrama de Venn?

4. Dados los siguientes conjuntos:

M = { a, b, c, d, e, f }, N = { {a}, {b}, {c}, {d}, {e}, {f} } y

P = { {a,b}, {c, e, f}, {d} }

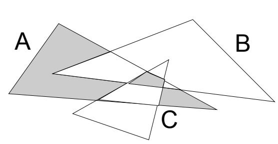
decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) $\{a, b\} \in M$	e) $\{a, b\} \in P$	i) $\{d\} \in N$
b) $\{a, b\} \subset M$	f) $\{a, b\} \subset P$	j) $\{d\} \in P$
c) $\{a, b\} \in N$	g) $M = N = P$	
d) $\{a, b\} \subset N$	h) $\{d\} \in M$	

5. Inventar dos conjuntos A y B para que la intersección sea {1, 3, 5, 7}.

6. Si A – B = { x, n, y} y A = {n, y, z, x, m}, inventar tres conjuntos diferentes que representen a B.

7. En el siguiente diagrama. ¿A cuál de los siguientes conjuntos corresponde la zona sombreada?



$(A - B) \cup (A - C)$

$(A - B) \cap C$

$[A - (B \cup C)] \cup [A \cap B \cap C]$

$(A - C) \cap B$

$(A \cap B \cap C) \cup A$

8. Si una figura geométrica es un conjunto no vacío de puntos ¿Cuántas figuras geométricas hay en una geometría que sólo tiene tres puntos?

9. Dados lo siguientes conjuntos:

U = { x:x es un cuadrilátero cerrado }

A = { x:x es un paralelogramo }

B = { x:x es un rombo }

C = { x:x es un cuadrado }

D = { x:x es un trapecio}

a) Hacer el diagrama

b) Completar la línea de puntos:

1. C ...... B	2. A $\subset$ ......
3. B ...... A	4. B C
5. D $\subset$....	6. C $\subset$ ...... $\subset$ D

Respuestas Unidad 0

1- n $\in$ A.   m no pertenece a A.

2- A está definido por extensión. B está determinado por comprensión.

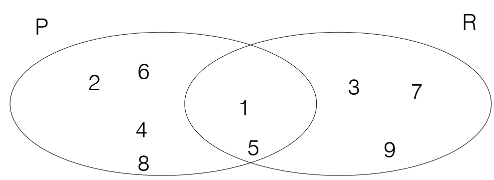
En el conjunto propuesto determinado por comprensión, la o las propiedades usadas tienen que ser tales que ante cualquier elemento se pueda decidir sin ambigüedad si está o no en el conjunto.

3- Si; no; no; no; sí.

4- Sí, porque tienen los mismos elementos.

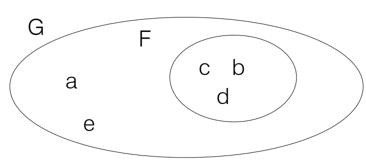
5- A unión B es el conjunto de las x tal que x pertenece a A o x pertenece a B.

6-



7- P $\cup$ R={1,2,3,4,5,6,7,8,9}

8- F $\cup$ R={a,b,c,d,e}



9- Si F es subconjunto de G, es decir $F \subset G$, $F \cup G = G$

10- R intersección S es el conjunto de las x tal que x pertenece a R y x pertenece a S.

11- Los conjuntos C y D propuestos tienen que tener a –1; 0 y 1 como los únicos elementos comunes. Por ejemplo: A={–1,0,1} ; B={-2,-1,0,1,2}. Ud. proponga otros.

12- Los conjuntos propuestos no tienen que tener elementos comunes. Por ejemplo: A={a,b} ; B={c}. Ud. proponga otros.

13- $B - A = \{6,9\}$

14- $B - A \neq A - B$

15- A diferencia B es el conjunto de las x tal que x pertenece a A y x no pertenece a B.

16- $B \cap B^c = \varnothing$, $B \cup B^c = U$

17- Sí.

Ejercicios de aplicación

1-

a) A={3,4,5,6,7,8,9,10} C={5,6,7,8,9}

b) $B \cap C = \{6, 8\} = \{x : x \in N, x = 6 \text{ o } x = 8\}$

$(A \cup B) \cap C = \{5,6,7,8,9\} = \{x \in U : 5 \leq x \leq 9\}$

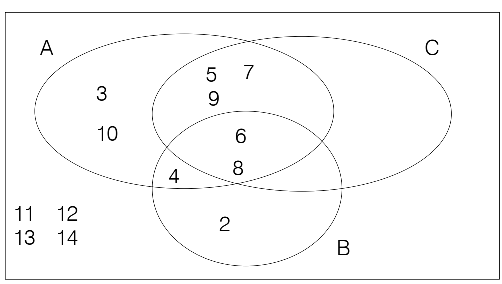
$B - C = \{2,4\} = \{x\text{:x es natural par menor que } 5\}$

$U - (A \cup B) = \{1,11,12,13,14\} = \{x \in U : x < 2 \text{ ó } 10 < x < 15\}$

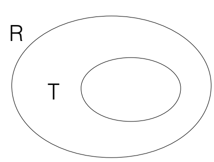
$C^c = \{1,2,3,4,10,11,12,13,14\} = \{x \in U : \leq 4 \text{ ó } 10 \leq x \leq 14\}$

$(B \cap C)^c = \{1,2,3,4,5,7,9,10,11,12,13,14\} = \{x : x \in U \text{ y } x \neq 6 \text{ y } x \neq 8\}$

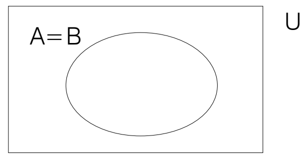
$(A \cup C) - A = \{2\}$



2- $R \cap T = T$, $R \cup T = R$



3- A=B El diagrama de Venn es un solo conjunto que representa a ambos.



4- a) F, b) V, c) F, d) F, e) V, f) F, g) F, h) F, i) V, j) V.

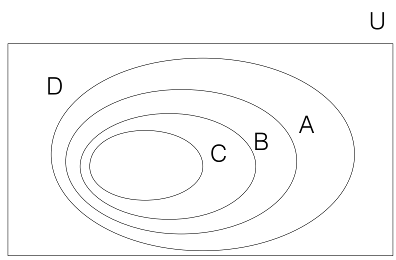
5- La condición que deben cumplir los conjuntos A y B es que los únicos elementos comunes deben ser 1, 3, 5 y 7.

6- Tres posibilidades son: B= {m, z} ó B= {m,z,r} ó B={m,z,a,l}

7- $[A - (B \cup C)] \cup (A \cap B \cap C)$

8- 7 porque hay 3 figuras de 1 sólo punto; 3 figuras de 2 puntos y 1 figura de 3 puntos.

9- a)



b) 1. $C \subset B$ 2. $A \subset U$ 3. $B \subset A$ 4. $B \supset C$ 5. $D \subset U$ 6. $C \subset B \subset D$ ó $C \subset A \subset D$